日評数学選書

記号論理入門

［新装版］

前原昭二

日本評論社

はしがき

本書は，その表題の示すごとく，記号論理の入門書であります．しかし，入門書とよばれる多くの書物におけるように，記号論理の初歩的な一部だけを単にぬき出し，ただそれを書いたというものではけっしてありません．そうではなくて，記号論理一般に関する1つの概観を与えたものであります．こんにち，記号論理の名のもとに研究されつつある領域はまことに広範囲にわたり，いかに概観とはいえ，それら全般についての記述などは，とうてい本書のくわだて及ばなかったところであります．それよりはむしろ，とり上ぐべき題材を極度に制限し，それによって記号論理の本質をかえって浮き彫りにすることができれば，そこにこそ本書の使命があると考えました．その計画の成功せしや否やは，識者の判断にゆだねるほかはありません．

本書を書くに当っての仮想的な読者としては，記号論理にいささかでも興味をもたれる〈教養ある一般の人士〉というものが考えられました．とくに，しばしば，著者の念頭に去来したのは

理科系の大学生　　高校における数学の先生

あるいは

哲学者　　や　　数学者一般

時として，記号論理の専門家といわれる人々でさえありました．だからといって，特別どこに焦点を合わせるということもなく，それらの人々の最大公約数的なところへ目標を定めたので，以上のどのような方々にも読んでいただける内容かと思います．

真の学問とは，けっして，机に向いネジリハチマキでするものとは限りますまい．わたくしは，この本を，電車のなかでも，寝床のなかでも読んでい

ただけるようなものにしたいと思いました．もっとも，机に向かって読まれる場合のことをも考慮して，練習問題を入れておくなどという余計なことまで考えました．解答は巻末にまとめてあります．

読者とスタイルに関する以上の２点を考え合わせた結果，記号論理の技術的側面の紹介は二のつぎの問題として，むしろ記号論理における基本的な考え方や基礎概念の説明のほうに重点をおき，あわせて，われわれが日常使用している論理との関連をも重視しながら，でき得る限り明確に，しかも，なるべく手短かに，記号論理の全体系を完全に記述してしまうということをもって，本書の目的としたのでした．したがって，本書の主要部分は，論理記号の意味と使用法とを説明した第１章と，演繹的推理の基本的形式を記述した第２章とにあると思っていただきたいのです．じつは第８章も，いささかそのような意味合いをもつ章ではありますが，話がいたずらに空理空論におわるのをさけるためには，是非とも第７章のあとにおかざるを得なかったのであります．

論理計算（Logikkalkül）の体系にはいろいろな方式のものがあるのですが，種々の体系を列挙し，それらを比較検討することは，それは専門家を志す人々のための入門書のなすべきこととして，本書の著者としては，はじめから全然考えにはいれませんでした．わたくしは，この第２章を書くに当って，何のためらいもなく，ゲンツェンによって〈自然な論理計算（natürlicher Kalkül)〉と名づけられた体系を採用しました．それは通常 *NK* および *NJ* として引用されるもので［*K* は〈古典論理の論理計算（klassischer Kalkül)〉，*J* は〈直観主義の論理計算（intuitionistischer Kalkül)〉を意味します］，第２章は，結局のところ，この *NK*・*NJ* の紹介にほかなりません．それらが，多くの体系のうち，とくに日常的な論理をよく反映しているものであると思ったからです．

NK という演繹法の応用として，私は２つの話題をとり上げました．その第１は真理値・真理表・トートロジーに関するものであり（第３章・第４章），第２は，いくつかの有名な同値式を導いてみせることであります（第

7章）．とくに，同値式を導くに際しては，同値式が命題に関して等式の役割を演ずるということを知らなければあまり意味はありませんし（第５章），ド・モルガンの法則や双対の原理を利用するほうがより実際的であると考えました（第６章）．これら２つの話題は互いに独立しておりますので，第１章・第２章を読まれたのち，ただちに第５章へ移ることも可能です．専門家でない人々にとっての記号論理の知識としては，まずこれで十分であると思います．

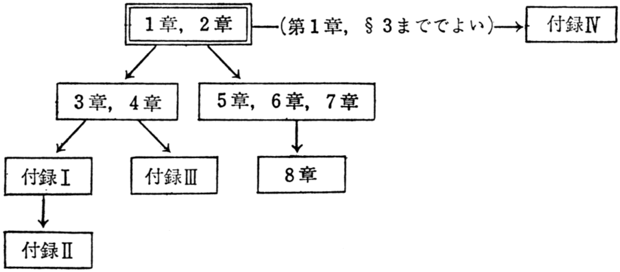
その他，４つばかりの事項が付録として添えてありますが，本来これらは本文中に述べてもよいことであります．ただそれは，そうでなくてもややくど過ぎるわたくしの文章が，さらにだらけるのを避けるために，ある部分をとり出し，別記したに過ぎません．付録を読まれるための予備知識は，〈本書の構成〉としてつぎの頁に図解してある通りであります．

最近，高等学校の教科のなかに記号論理を導入してはという話もあるようですが，わたくしはそれに賛成でも反対でもありません．しかし万一，そのような時世がきたとしても，本書の内容のようなことを生のままで高校生に教えることには絶対反対です．そうではなくて，そのようなときにそれを教える数学の先生方はもちろん，そのような論議をなさる方々に，少なくとも本書程度のことは知っておいていただきたいと，こう思うのであります．わたくしはけっして高校生向きの参考書を書いたつもりではありません．

昭和42年6月24日

著　　者

本書の構成



目　次

第1章　論理記号による命題の表現法

記号論理学においては，〈論理記号〉というものを用いて種々の命題を表わします．本書で用います**論理記号**はつぎのようなものであります：

$\to$ ………… **ならば**

$\rightleftarrows$ ………… **同値である**

$\wedge$ ………… **and**

$\vee$ ………… **or**

$\neg$ ………… **not**

$\forall$ ………… **すべて**

$\exists$ ………… **存在する**

そしてまず最初に，これらの論理記号を用いて命題をどのように表現するかということを説明するのが，この第1章の目的であります．

記号論理で用います論理記号にはいろいろな種類のものがありまして，世界的にもあまり統一がとれておりません．それらはすべて内容的には同じことを表わしているのでありますが，それを表わす記号そのものが違っているのであります．他の著書や論文をご覧になるときのご便宜のためにと，付録Ⅳとして，そのうちのおもだったものを紹介しておきました．ご参照下さい．

§1.　命題結合記号

命題 A，あるいは，2つの命題 A, B が与えられましたとき，$\neg A$ とか $A\to B$，$A\rightleftarrows B$，$A\wedge B$，$A\vee B$ という記法によって，つぎのような命題を表わします：

$A\to B$ …… ***A* ならば *B***

$A\rightleftarrows B$ …… ***A* と *B* とは同値である**

$A \wedge B$ …… **A であり，しかも B である**

$A \vee B$ …… **A または B**

$\neg A$ …… **A でない**

ここで，とくに $A \rightleftarrows B$ とは

$$(A \to B) \wedge (B \to A)$$

のことであると考えるのが，意味の上からも実際的であり，記号論理でのとり扱いとしても最も普通の方法でありますので，本書においても

$$\to,\ \wedge,\ \vee,\ \neg$$

だけを基本的な**命題結合記号**と考え，$A \rightleftarrows B$ というのは

$$(A \to B) \wedge (B \to A)$$

という長い式を表わす1つの省略法として用いることにいたします．

ともあれ，〈命題結合記号〉というのはいずれも，1つあるいは2つの命題が任意に与えられたとき，その命題から新しい1つの命題を作る或る種の演算を表わす記号であります．ところが，残りの2つの論理記号

$$\forall \quad \text{および} \quad \exists$$

の用い方は，いささか異なった思想圏に属すものでありますので，その使用法の説明に先だって，〈命題〉というものの性格をもう少し明らかにしておく必要があります．

§2.　命題と命題関数

〈命題〉というのは，最も簡単には，**真**か**偽**のいずれかに定まっているもの，すなわち，〈正しい〉かまたは〈間違っている〉かのどちらかにきまっているものをいうのであります．たとえば，$1=1$ は真な命題でありますし，$1=2$ は偽な命題であります．しかし，$a=1$ とか $a=b$ というのは，そのままでは〈真な命題〉とも〈偽な命題〉ともいえません．それらは，a あるいは a, b という変数の値を定めた上でなければ，その真偽を問題にすることができないのです．

そこで，話をキッパリとさせるために，ここしばらくは，命題という言葉

は〈真偽の定まっているもの〉に限定して用いることにいたします．ですから，$a=1$ とか $a=b$ というように変数を含んでいる命題は，いまは命題とは考えないことにします．もちろん，〈命題〉というものをこのように限定して考えることは，あくまでも**ここしばらく**の話でありまして，けっして**本書を通じて**ということではありません．それは，この第1章限りのことであります．くわしくは，この章の §8 までのことであります．

それでは，ここしばらくのことにしても，〈変数を含む命題〉はどのように考えるのでありましょうか？

変数を含む命題，それは1つの**命題関数**——関数値が命題であるような関数——を表わすものと考えます．たとえば，

$$x+3=xy$$

という命題を $F(x,y)$ と表わせば，この F は

$F(1,4)$ は〈$1+3=1\times4$〉という真な命題

$F(2,2)$ は〈$2+3=2\times2$〉という偽な命題

となるような1つの〈関数〉を表わしている，と考えるのであります．あるいはまた，〈x は素数である〉ということを $G(x)$ と書くことにすれば，この G も1つの命題関数で，$G(3)$ は正しい命題を，$G(4)$ は間違った命題を表わしているわけです．

変数を含む命題は絶対に真偽がきまっていない，といいきる訳にはいきません．たとえば，普通には，$a=a$ は真な命題で，$a<a$ は偽な命題です．しかしここでは，それをつぎのように考えます：

〈$a=a$〉を $F(a)$ と表わしたとき，この命題関数 F の値はつねに真な命題で，もし〈$a<a$〉を $G(a)$ と表わせば，この命題関数 G の値はつねに偽な命題である．

これはちょうど〈定数〉という関数を考えることに相当しています．1つの数としての〈定数〉と，その定数をつねに関数値としてとる関数——定数値関数——とは異なった概念でありましょう．

§ 3.　全称記号と存在記号

1変数 x の命題関数 $F(x)$ が与えられたとき，$\forall xF(x)$ および $\exists xF(x)$ という記法によって，それぞれ

$$\forall x F(x) \;\cdots\cdots\; \textbf{すべての}\; \boldsymbol{x}\; \textbf{に対して}\; \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$$

$$\exists x F(x) \;\cdots\cdots\; \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\; \textbf{という}\; \boldsymbol{x}\; \textbf{が存在する}$$

という命題を表わします．くわしくは，$\forall xF(x)$ というのは〈**すべての** (all) x に対して $F(x)$ は真な命題となる〉ということで，$\exists xF(x)$は〈$F(x)$ が真な命題となる x が**存在する** (exist)〉ということであります．$\forall$ とか $\exists$ というのは，all と exist の頭文字からとった記号でありましょう．

$\forall xF(x)$ という形の命題を**全称命題**，$\exists xF(x)$ という形の命題を**存在命題**[1]とよびますので，$\forall$ および $\exists$ という論理記号のことを，それぞれ，**全称記号・存在記号**といいます．

$F(x)$ が1変数 x の命題関数であるとき，$\forall xF(x)$ および $\exists xF(x)$ はいずれも1つの〈命題〉を表わします．それは真偽の定まった命題であります．命題関数 F の関数値がすべて真な命題であれば，$\forall xF(x)$ は真な命題であり，しからざる場合には，$\forall xF(x)$ は偽な命題を表わします．また，命題関数 F の関数値のなかに真な命題が1つでもあれば，$\exists xF(x)$ は真な命題ですし，F の関数値がすべて偽な命題であれば，$\exists xF(x)$ は偽な命題であります．このように，$\forall x$ とか $\exists x$ というものは，いずれも任意の命題関数 $F(x)$ に1つの命題を対応させる作用素 (operator) と考えられますので，$\forall x$ のことを**全称作用素** (universal quantifier)，$\exists x$ のことを**存在作用素** (existential quantifier)，これらを総称して**限定作用素** (quantifier)といいます．

例1.　$\forall x(f(x)=0)$ というのは，

$$f(x)=0$$

というのが恒等式であるということを意味する命題であります．

例2.　$\exists x(f(x)=0)$ という命題は，方程式

$$f(x)=0$$

1)　伝統的な論理学では，ここでいう存在命題のことを**特称命題**とよぶならわしになっているようですが，ここではそのものズバリで〈存在命題〉とよぶことにしました．

が根をもつということを意味します.

§ 4. 述 語・性 質

命題関数 $F(x)$ を〈x は F である〉と読むとすれば，$F(\quad)$ は〈……は F である〉という部分に相当します．その意味で $F(\quad)$ のことを述語（predicate）とよびます[1]．また，$F(x)$ を〈x は F という性質をもつ〉と読みますならば，定数 a に対して命題 $F(a)$ が正しい場合，この F は a のもつ1つの性質であると考えることもできるわけです．

1. たとえば，〈ソクラテスは死ぬ〉という命題を例にとって考えてみましょう．まず，s という記号をもってソクラテスという個人を代表する定数[2]とし，〈……は死ぬ〉という述語を $G(\quad)$ と表わすことにします．そうしますと，〈ソクラテスは死ぬ〉という命題は $G(s)$ と表わされ，$G(s)$ という命題が正しいというのは，s［＝ソクラテス］というものが G［＝死ぬ］という性質をもっている，ということになるのであります．

2. こんどは〈人間は死ぬ〉という命題を考えてみます．もし〈……は死ぬ〉という述語 $G(\quad)$ 以外に〈……は人間である〉という述語 $F(\quad)$ というものを用いれば，この命題は

$$\forall x(F(x) \to G(x))$$

と表わされます．これは，どんな x に対しても，x がもし F［＝人間である］という性質をもっていれば，その x は G［＝死ぬ］という性質をも持っている，ということを意味します．これが〈人間は死ぬ〉という命題の実質的な内容でありましょう．

---

1) これは，文法的な〈述語〉の概念にピタリと合致しているものではないかも知れませんが，少なくとも，$F(\quad)$ の主要部分は述語に相当するものであります．

2) このように，数でないものに対しても〈定数〉という言葉を用います．それは，ある1つの特定の〈もの〉を代表する記号という意味であります．〈変数〉という言葉の用い方についても同様です．このような言葉の流用は数学の内部でも行なわれています．たとえば，多項式というものは数そのものとは違いますが，やはり倍数・約数などという言葉を用い，あまり〈倍多項式〉とか〈約多項式〉などとはいわないようであります．

2.1.　〈人間は死ぬ〉という命題に限らず，どんな述語 F, G に対しても，

$$\forall x(F(x) \to G(x))$$

という命題をわれわれが日本語で読むとき，それを〈FはGである〉ということがあります．ですから，日本語の表現形式としては，$G(s)$ という命題を〈sはGである〉と読むのとまったく同様な形式をもつことになります．

たとえば，〈ソクラテスは死ぬ〉という命題と〈人間は死ぬ〉という命題とは，そのいずれもが〈……は……である〉という形式の命題ではありますが，一方はソクテスという個人に関する叙述，すなわち，いわゆる**単称判断**であるのに，他方は人間の全体に関する**全称判断**であるのです．論理記号を用いてのこれらの命題の表現形式が異なったのは，まさしくこのことに由来しておるのであります．

2.2.　〈人間は死ぬ〉というのが全称判断であることを強調するために〈**すべての**人間は死ぬ〉というように表現することも多いようです．これと同様な意味で

$$\forall x(F(x) \to G(x))$$

を〈**すべての** FはGである〉と読めば，誤解のおそれは少なくなります．しかしながら，日本語とか英語のような日常語においては，つねに内容を正確に表現することにのみ重点がおかれているわけではありません．日常語による命題の表現を論理記号による表現に移しかえる場合には，いささかの注意が肝要であります．それは，日常語によって表現された内容を正確に理解することによってはじめて達成されることであります．

3.　論理記号を用いて表わされた命題を日常語で読む読み方が一意的でないのと同じく，日常語によって表わされた命題を論理記号を使って表現する方法も一定しているわけではありません．たとえば，〈ソクラテスは死ぬ〉という命題を

$$\forall x(F(x) \to G(x))$$

という形の命題と考えることもできます．それは$G(\quad)$を前と同じく〈……は死ぬ〉という述語と考え，$F(\quad)$としては〈……はソクラテスである〉と

いう述語を採用すればよいのです．

このことは，欧文和訳・和文欧訳におけるのとまったく同様です．欧文を日本語に翻訳するにも，その訳し方はひと通りしかないわけではありません．しかも，その欧文の表現形式にのみ心をうばわれていたのでは正しい翻訳はできません．まず第1に，その欧文の意味することを正確に理解すること．そして，第2に，その目的に応じて適切な日本語に移しかえるのであります．そのときには，もちろん，日本語の使用法を知っていなければなりません．この第1章は，ちょうど，日本語の使用法を説明している部分に相当しているわけです．

4.　日常語の話がでたついでに，〈存在命題〉の日本語での読み方の例をあげておきます．

$$\exists x F(x)$$

という命題を〈$F(x)$ という x が**存在する**〉と読むことは前にも述べましたが，〈**或る** x に対して $F(x)$〉というように，$\forall x$ を〈**すべての** x に対して……〉と読むのと同じく，$\exists x$ を〈**或る** x に対して……〉と読むこともあります．場合によっては，〈F というものが**ある**（存在する）〉と簡単にいってしまうこともあります．

$$\exists x(F(x) \wedge G(x))$$

という命題を（$\wedge$ は and の意でありました．念のため）

$F(x)$ かつ $G(x)$ となる x が**存在する**

と読めば問題はありませんが，

F であって G であるものが**ある**（存在する）

或る F は G である

G である F が**ある**（存在する）

などということもあります．あとの2つは，〈或る G は F である〉とか〈F である G がある〉といっても同じことで，F と G のいずれを主語とするかだけの違いです．たとえば，F を〈……は偶数である〉という述語，G を〈……は素数である〉という述語とすれば，

$$\exists x(F(x) \wedge G(x))$$

という命題は，〈或る偶数は素数である〉とも〈或る素数は偶数である〉と

も読めるわけであります．

§ 5．概念・条件・集合

概念とか**条件**とかいう言葉もあります．しかしそれらは，形式的に割りきって考えてしまえば，結局のところ，いずれも〈述語〉とか〈性質〉というものと区別する必要はないものです．

ある性質 F をもつ個々の具体的なものではなしに，その性質 F のみをもつ抽象的なものを一般的に考えた場合，それを〈概念〉とよぶのでありますが，われわれは，そのような，性質 F をもつものという〈概念〉と，性質 F そのものとを同一視するのであります．もちろん，〈……は人間である〉という性質そのものと，〈人間〉という概念とは，われわれの心には異なったイメージを与えます．〈概念〉というものは確かに抽象的なものではありますが，それにもかかわらず，われわれに何かある具体的な〈もの〉を連想させます．〈性質〉とは，そのような連想をたち切った，より高度の抽象性をもったものであります．しかしながら，われわれの記号論理学は，そのような人間心理の微妙な差異を区別し得る程には精巧なものではありません．そのように曖昧なものをそのままに受け入れるには，あまりにも明晳なものであり過ぎるのであります．

性質 F のことを〈条件〉とよぶ場合には，$F(e)$ という形の命題を〈e は条件 F をみたす〉というように読みます．また，たとえば，

$$\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$$

という命題が成立する（正しい）場合，F のことを〈G となるための［1つの］**十分条件**〉，G のことを〈F となるための［1つの］**必要条件**〉というのです．

$$\forall x(x=1 \rightarrow x^2=1)$$

という命題が成立することを〈$x=1$ は $x^2=1$ となるための十分条件〉といい表わしますが，この場合の $x=1$ とか $x^2=1$ とかは，けっして x に定数を代入して得られる個々の命題を表わしているのではありますまい．そうではなくて，$x=1$ とか $x^2=1$ をそれぞれ $F(x)$ および $G(x)$ と表わすことによって得られる条件 F や G のことを，単に $x=1$ とか $x^2=1$ という式のままで代表させているのでありましょう．

形式的に割りきった考えをさらに続けていけば，われわれは〈性質〉のことを**集合**とよぶことさえできます．そのときには，命題 $F(e)$ のことを〈e は集合 F に属す〉とか〈e は F の**元**（**要素**，element）である〉と読み，それを

$$e \in F$$

と表わします．$F(e)$ と表わすか $e \in F$ と表わすかは，まったくの表記法の問題で，命題の内容には関係しません．

〈集合〉という言葉から，われわれは〈或る1つの性質をもつもの全体の集まり〉という具体性をもったあるものを連想します．その連想は，〈性質〉という抽象的なものに具体的イメージを与え，われわれの思考［とくに，数学的思考？］を容易ならしめます．そのことが，現代数学において集合概念の重要視される1つの理由であります．しかも，数学における集合概念の重要性は，それにのみとどまりません．われわれは，〈性質〉という抽象的なものを〈集合〉と呼びかえ，その具体的イメージを心にえがくことにより，個々の集合にそれぞれ1つの〈もの〉としての存在理由を与えるのであります．リクツからいえば，名称などにこだわることなく，個々の性質を〈もの〉と考えればよいようなものの，やはり〈集合〉というイメージを通すことによって，その移行がスムーズに行なわれます．そして，集合を〈もの〉と認めた以上，自由な人間精神は，さらに〈集合に関する述語〉すなわち〈集合の性質〉を考えるようになります．それは〈述語の述語〉であり〈性質の性質〉です．集合という言葉を用いて表わせば〈集合の集合(集合を元とする集合)〉でありまして，われわれはそれを**集合族**とよびます．ひとたび集合を〈もの〉と考えた以上，われわれにとっては，もはや集合族を〈もの〉と考えることは容易です．このような考え方は，集合族の集合，またその集合，・・・と，いくらでも発展していきます．このように，つぎつぎと，われわれの思考の対象たり得る〈もの〉の範囲を拡げていくことによって，われわれの表現し得る命題の内容も，だんだんと豊富になっていくのです．このことは，日常語を用いるか論理記号を用いるかにはよりません．そして，そのことこそ，数学における集合概念の有用性の最も本質的な根拠となっているものなのであります．このような〈概念の対象化〉というものに触れてこそ〈数学の論理〉の真実の姿を見ることになるのでありますが，それは，より高級な論理，あるいは，第2次的な論理であるとして，本書ではとり扱いません．それにいたる第1課として，まず，〈もの〉と〈集合〉とは異なる，という立場を終止一貫とることにいたします．本書において，〈もの〉とか〈対象〉とかよぶものは，数とか点とかいうようなものであるとお考え下さればよろしい．しかし，その議論は，〈もの〉が集合であっても集合族であってもかまいません．ただ，本書で〈もの〉とよぶものと，その〈もの〉の〈性質〉とを区別して下されば，それで十分なのであります．[1)]

---

1) 現代の数学においては，われわれの考え得る集合を全部〈もの〉と考えることがあります．そのときには，〈集合の性質〉のことをふたたび〈集合〉とよぶわけにもいきませんので，それを**クラス** (class) とよんで，〈もの〉としての**集合** (set) と区別いたします．

§6.　論理記号の用例（その1）

1.　F と G とを任意に与えられた述語として，〈F ならば G〉という命題を論理記号を用いて表わしますと

$$\forall x(F(x) \to G(x))$$

となります．

1.1.　この F と G を〈条件〉とみた場合には，この命題を〈F は G のための**十分条件**である〉とか〈G は F のための**必要条件**である〉と読みます．このことは，まえにも述べました．

1.2.　F と G とを〈性質〉と考えます場合には，〈F という性質は G という性質を**含む**〉とか〈G という性質は F という性質に**含まれる**〉と読みます．F という性質をもつものは**いつでも**［必然的に］G という性質をも持っているというときに，普通には，このような言葉づかいをするわけです．たとえば，〈4の倍数〉という性質のなかにはすでに〈2の倍数〉という性質は含まれているのです．

1.3.　ところが，F と G とを〈集合〉と考えた場合には，この〈含む〉とか〈含まれる〉という関係がちょうど正反対になります．もっとも，〈性質〉と考えるか〈集合〉と考えるかによって，なにも実質が変化するわけではありません．正反対といったのは，それはわれわれの〈読み方〉だけの話であります．

F と G とを集合と考えます場合には，$F(x)$ とか $G(x)$ という表現の代わりに $x \in F$ とか $x \in G$ と書くほうが集合の感じが出て具合がよろしい．このような記法を使って上記の命題を書きなおしますと，

$$\forall x(x \in F \to x \in G)$$

となります．この命題をわれわれは

$$F \subset G$$

という記号で表わし，〈F は G の**部分集合**である〉と読むのです．あるいはまた，〈集合 G は集合 F を**含む**〉とか〈集合 F は集合 G に**含まれる**〉ともいいます．

伝統的な論理学においては，ある〈性質〉と，その性質をもつもの全体からなる〈集合〉とを，同一の〈概念〉の２つの側面と考え，性質のことを，その概念の**内包**（intension），集合のことを**外延**（extension）とよび，上記のことを

概念の内包と外延とは反対の方向に増減す

などと表現しました．

われわれの使用している論理記号 $\rightarrow$ の代わりに $\supset$ という記号を用いて，$A \rightarrow B$ という命題を $A \supset B$ と表わす論理記号の使用法もあります(付録 IV 参照)．これは内包的な考えに由来する記号法でありまして，述語を集合とみずに性質と考える場合には，性質の包含関係をよく反映する記号となります．しかし本書では，混乱をさけるために，$\supset$ とか $\subset$ という記号は，集合の包含関係を表わすものとしてのみ用います．

2. つぎに，

$$\forall x(F(x) \rightleftarrows G(x))$$

という形の命題を考えてみましょう．

2.1. F と G とを条件とみなす場合には，これを〈F は G のための**必要十分条件**である〉とか，あるいは逆に〈G は F のための必要十分条件である〉と読みます．

2.2. F と G をともに性質と考える場合にも，また集合と考える場合にも，〈F と G とは**等しい**〉とか〈F と G とは**同じ**である〉といいます．とくに集合と考える場合には，この命題は

$$\forall x(x \in F \rightleftarrows x \in G)$$

と表わされ，これを簡単に

$$F = G$$

と書きます．

この＝の定義から当然に

$$(*) \qquad \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{F} \rightleftarrows \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{G}) \rightarrow \boldsymbol{F} = \boldsymbol{G}$$

ということがでます．これは〈当りまえ〉のことであります．しかし，場合によっては，集合に関する ＝ が，このこととは無関係に定義されていると考えることがあります．それはとくに，〈集合〉を〈もの〉と考える場合であります［いまのわれわれは，〈集合〉と〈もの〉とを区別して考えているのですが……（§5 の末尾を参照)］．そうして，〈もの〉一般について，＝ というものがあらかじめ定義されてしまっているようなときには，この（$*$）はもはやけっして自明では

なくなります．少なくとも，＝の定義から明らか，というわけにはいかぬ場合が起ります．とはいうものの，われわれの集合に対する直観は，この（＊）がつねに成立することを要求しますので，そのような場合には，われわれは，この（＊）を集合に対する1つの公理と考え，それを**外延性の公理**(axiom of extensionality) とよびます．2つの集合 F, G が外延的に等しければ［$\forall x(x \in F \rightleftarrows x \in G)$ ならば］，この2つの集合は一致する，ということであります．

2.3.　包含関係の場合と異なり，〈同じ〉という言葉の場合には，述語を性質と考えても集合と考えても，くい違いは起りません．ですから，

$$\forall x(F(x) \rightleftarrows G(x))$$

という命題を〈F と G とは**同じ概念**である〉と読んでも問題はないと思います．

3.　F と G とを与えられた述語とするとき，〈F または G〉という日本語から，われわれは，さし当って2つの内容を思い浮べることができます．その第1は，それを1つの命題と考える場合．そして，その第2は，それを述語と考える場合であります．

3.1.　〈F または G〉を命題と考える場合には，それは〈すべてのものは F か G である〉ということでありましょう．すなわち，

$$\forall x(F(x) \vee G(x))$$

ということであります．

3.2.　〈F または G〉を述語と考えるという場合には，それは〈……は F または G である〉という述語のことでありましょう．それは，

$$F(x) \vee G(x)$$

を x の関数（命題関数）と考え，それを $H(x)$ と表わしたときの H のことであります．または，$H(\quad)$ のことであります．

3.3.　F, G, H をすべて集合と考える場合には，上のような集合 H のことを F と G との**和集合**とよび

$$F \cup G$$

という記号で表わします．

$H(x)$ というのは $F(x) \vee G(x)$ そのもののことでありますから，したが

って，もちろん

$$\forall x\,[H(x) \rightleftarrows (F(x) \vee G(x))]$$

という命題は成立します．すなわち，これは正しい命題です．ここで，$F(x)$ および $G(x)$ をそれぞれ $x \in F$ および $x \in G$ と書きかえ［それは，表現のみを変更しているので，内容を変えているのではありません］，さらに $H(x)$ を $x \in F \cup G$ と書きなおせば，この命題は

$$\forall \boldsymbol{x}[\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{F} \cup \boldsymbol{G} \rightleftarrows (\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{F} \vee \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{G})]$$

ということになります．これは，和集合 $F \cup G$ の定義を表わしています．

もちろん，日本語で〈F または G〉という場合，そこには明瞭に述べられてはいないが，ハッキリとした1つの主語が存在する場合があります．そのときには，その隠された主語が e という〈もの〉であるか，または，Kという〈概念〉であるかにしたがって，それぞれ，その命題を

$$F(e) \vee G(e)$$

あるいは

$$\forall x[K(x) \to (F(x) \vee G(x))]$$

と表わさねばなりません．しかし，このようなことは，むしろ日本語の解釈の問題であって，入門書とはいえ，記号論理の教科書のとり扱うべきことではないと思います．

4. F, G という述語に関して〈F であり，しかも G である〉というときにも，それを

$$\forall x(F(x) \wedge G(x))$$

という命題と考える場合と，

$$F(x) \wedge G(x)$$

という命題関数と考える場合があります．

$F(x) \wedge G(x)$ という命題関数を $H(x)$ と表わすとき，この F, G, H をすべて集合と考えるならば，この H を F と G との**共通部分**といい

$$F \cap G$$

という記号で表わします．したがって，

$$\forall \boldsymbol{x}[\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{F} \cap \boldsymbol{G} \rightleftarrows (\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{F} \wedge \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{G})]$$

は正しい命題であり，$F \cap G$ の定義を表わすものと考えられます．

5. 〈Fでない〉というのに関しても同様です．F を述語とした場合，やはり

$$\forall x \neg F(x)$$

という命題と考えられる場合もあれば，

$$\neg F(x)$$

という命題関数と考えられる場合もあります．

Fおよび $\neg F$ という述語を集合と考える場合には，この $\neg F$を F の**補集合**または**余集合** (complementary set) といい，Fの補集合は，しばしば

$$F^c$$

などという記号で表わされます．ここで〈補集合〉というのは，もちろん，われわれの考えている〈もの〉の全体に関しての補集合の意であります．

これに関して

$$\forall x(x \in F^c \rightleftarrows x \notin F)$$

という命題が成立します．ここで，$x \notin F$ と書きましたのは

$$\neg(x \in F)$$

の略記号であります．

6.　1つの変数 x を含む命題 $F(x)$ が与えられたとき，その条件F をみたす〈もの〉全体からなる集合を

$$\{x \mid F(x)\}$$

という記号で表わします．割りきって考えたときには，これは F という条件そのものなのですが，普通には，これは集合と考えたときの F を表わす記号です．

また，これも普通には，条件 $F(x)$ というのが F という述語記号を用いて $F(x)$ と表わされている訳ではないので，与えられた条件を $x \in F$ と表わしたときの F というものを指示する記号として有用なのです．たとえば，

$$F = \{x \mid x \text{は偶数である}\}$$

とおけば，$e \in F$ が〈e は偶数である〉ということを意味することになるのであります．

この記法を用いれば,

$$F \cup G = \{ x \mid x \in F \vee x \in G \}$$

$$F \cap G = \{ x \mid x \in F \wedge x \in G \}$$

$$F^c = \{ x \mid x \notin F \}$$

であります. また,

$$F - G = \{ x \mid x \in F \wedge x \notin G \}$$

というのは

$$F - G = F \cap G^c$$

を意味します. このようにして定義された $F-G$ を F と G との**差集合**, または, **F に関する G の補集合**といいます.

要するに,

$$e \in \{ x \mid F(x) \}$$

というのは, $F(e)$ と書くのと同じことであります.

記号論理における伝統的な記号法では,

$$\hat{x}F(x)$$

と書きます. これはまったく $\{ x \mid F(x) \}$ と同じことであります. ここでは, 数学における最も普通の用法にしたがいました.

7.　ここで〈命題結合記号〉の使用法についての 1 つの注意をしておきましょう.

たとえば, 2 つの述語 F, G に対しての〈F ならば G〉という命題をわれわれは

$$\forall x (F(x) \to G(x))$$

と書くことにしたのですが, 時として, われわれは, この命題を単に

$$F \to G$$

と書きたいような衝動にかられることがあります. かく申す私も [記号論理の専門家でありながら], このような記法を用いることがしばしばあります. しかしそれは, 現在の記号論理における論理記号の使用法にかなうものではありません. 記号論理から離れた場合には, どんな記法を用いられるも, それは随意というものであります. その時々に応じて都合のよい記法を用いら

れるがよろしかろうと思います．しかしながら，記号論理の対象たり得るように命題を表現する場合には，やはり，記号論理における文法にしたがっていただかねばならぬのです．記号論理の枠内において

$$F \to G$$

という表現が用いられるとすれば，それは，F と G とがともに命題であるときに限ります．F や G が述語とか性質とかのときには，このような記法は用いません．

7.1.　数学からの例を1つあげてみます．数学においては，しばしば，2つの関数 f，g に対して

$$\forall x[h(x)=f(x)+g(x)]$$

となる関数 h を $f+g$ と表わす，などということがあります．＋という記号は，本来〈数のたし算〉を表わす記号です．ですから，関数 $h(x)$ のことを $f(x)+g(x)$ と表わす限り，その関数は，原理的には，いちいち数のたし算に立ちもどって考えねばならぬはずです．ところが，h を $f+g$ と表わすときの＋は，2つの関数 f，g に1つの関数 h を対応させる1つの演算，すなわち〈関数のたし算〉を表わす記号で，〈数のたし算〉を表わす記号＋とは，元来区別しなければならぬものであります．

関数のたし算 $f+g$ の定義は

$$\forall x[(f+g)(x)=f(x)+g(x)]$$

と表わされます．

7.2.　これと同様に

$$\forall x[(F \vee G)(x) \rightleftarrows (F(x) \vee G(x))]$$

$$\forall x[(F \wedge G)(x) \rightleftarrows (F(x) \wedge G(x))]$$

$$\forall x[(\neg F)(x) \rightleftarrows (\neg F(x))]$$

として，任意の述語 F, G に対する $F \vee G$ および $F \wedge G$ という述語，ならびに，任意の述語 F に対する $\neg F$ という述語を定義することもできます．そして

$$F \vee G, \qquad F \wedge G, \qquad \neg F$$

という表現を用いるときの $\vee$, $\wedge$, $\neg$ は，本来の命題結合記号とは違った意味で用いられているわけです．それは 7.1 における〈関数のたし算〉を表わす $+$ と同様な意味で用いられています．

しかし，もし F や G を集合と考える場合には，この

$$F \vee G, \qquad F \wedge G, \qquad \neg F$$

は，それぞれ，和集合・共通部分・補集合を表わす

$$F \cup G, \qquad F \cap G, \qquad F^c$$

と完全に一致していますので，われわれは，普通には，$F \vee G$ とか $F \wedge G$ とか $\neg F$ というような記法はほとんど用いません．

もっとも，この § の 5 において，$\neg F$ という記法はすでに用いています．$\neg F$ という表現法は後でも用いることはありますが（第 6 章），何もここでの説明に拘泥する必要はありません．

7.3.　さて，$\to$ に対しても，

$$\forall x[(F \to G)(x) \rightleftarrows (F(x) \to G(x))]$$

として，$F \to G$ というものを定義することができない訳ではありません．しかし，この〈$F \to G$〉はけっして命題ではなく，1 つの述語であることに注意していただきたいのです．

ところが不思議なことにも――これはまったく不思議というほかはないのですが――，F や G を述語とした場合，〈F or G〉とか〈F and G〉あるいは〈not F〉というのは，それらはみな，それぞれ 1 つの述語と考えることもできるのに，〈F ならば G〉というのだけは必ず命題として理解され，それは，日本語［あるいは，日常語］の言語感覚として，ほとんど述語とは考えられないのであります．ちょうどこれは，集合 F, G に対して，

$$F \cup G, \qquad F \cap G, \qquad F^c$$

がすべて集合であるのに，

$$F \subset G$$

だけは命題である，というのに相当しているのでしょう．

これは，もちろん，記号論理には関係のないことです．でも，われわれは

習慣上，論理記号で書かれた命題をも，つい日本語で読んでしまいます．そして，日本語で発音したという，ただそれだけの理由をもって内容を誤解するような，そんな表記法はさけるのが安全であります．ですから，F とか G が述語である場合の $F \to G$ という記法は，それが

$$F(x) \to G(x)$$

という命題関数を意味するにしろ，

$$\forall x(F(x) \to G(x))$$

という命題を意味するにしろ，［記号論理の範囲内では］絶対に使わぬことにいたします．

8.　ここで，中休みの意味から，余興として

白馬は馬にあらず

という命題の話をしましょう．中国の昔，春秋戦国の頃に，〈名家〉とよばれる一派の学者があって，この〈白馬は馬にあらず（白馬非馬）〉という言葉は，その名家の1人たる公孫龍という人の所説なのだということです．

8.1.　まず最初に，〈白馬は馬でない〉というのをより一般化して，任意の述語 F, G に対する〈F は G でない〉という命題を考えてみましょう．この〈F は G でない〉というのをわれわれの論理記号を使って書き表わしてみますと，つぎの4つぐらいの書き方が考えられます：

（1）　$\forall x(F(x) \to \neg G(x))$

（2）　$\neg \forall x(F(x) \to G(x))$

（3）　$\forall x(F(x) \rightleftarrows \neg G(x))$

（4）　$\neg \forall x(F(x) \rightleftarrows G(x))$

この4つの命題が区別できるように日本語でいうとなると，たとえば，つぎのようにでもいうのでしょうか：

（1）　F は必ず G ではない．

（2）　F は必ずしも G ではない．

（3）　F とは G でないということである．

（4）　F と G とは違う概念である．

このうち，とくに(1)は，〈Fは必ず「Gではない」〉と読んでいただきたいので，〈「Fは必ずG」ではない〉と読まれると困るのです．そう読みますと結局は(2)と同じになってしまいますから．また，

$$\forall x(F(x) \rightleftarrows G(x))$$

と書けば，これは〈FとGとは同じ概念である〉ということで，その意味で〈FとはGということである〉と読むこともできます．同様な意味で(3)を〈Fとは「Gでない」ということである〉と読むことができますし，(4)は〈FとGとは同じ概念ではない〉すなわち〈FとGとは概念として違う〉ということになります．

こういうふうに読んでみれば明らかなように，(1)から(4)までの4通りの命題は，それぞれに異なった内容を意味しているわけであります．

8.2.　もう話のタネはおわかりになったと思いますが，〈白馬〉という概念をF，〈馬〉という概念をGと表わせば，〈白馬は馬にあらず〉という言葉は，上記の(1)から(4)までの4通りに解釈することができます．あるいは，もっと別の解釈もあるかもしれません．しかしここでは，この4通りに話を限ってみましょう．

> 〈FはGでない〉というのには〈Fは「Gでない」〉というのと〈「FはG」でない〉という2通りの読み方があります．そして，そのおのおのについて，〈Fは……である〉というのを
>
> $$\forall x(F(x) \to \cdots\cdots)$$
>
> と解釈するか
>
> $$\forall x(F(x) \rightleftarrows \cdots\cdots)$$
>
> と解釈するかで，都合4通りの場合を考えることができたのでした．

この4通りに限った場合，〈白馬は馬にあらず〉というのを正しい命題と理解するためには，(4)の解釈によるほかはありません．そして，この〈白馬は馬にあらず〉という表現を奇異に感ずる理由は，少なくとも私の場合，まず第1に(1)の解釈が念頭に浮ぶからです．読者の皆さんがまず考えられるのは，いったい，どの解釈なのでありましょうか？

§7.　多変数の命題関数

1.　2変数の命題関数を**関係**といいます．たとえば，$x<y$ というときに用いる $<$ は1つの関係を表わす記号です．

3変数の命題関数を**3項関係**といいます．$F(x,y,z)$ によって〈x は z の父親で，y は z の母親である〉を表わしたとすれば，この F は1つの3項関係を表わします．

このように，一般に，n 変数の命題関数を **n 項関係**とよびます．とくに**1項関係**とは〈性質〉のことで，**0項関係**とは，それは〈命題〉ということになります．

関係——**2項関係**——を表わす場合には，$F(x,y)$ のことを

$$xFy$$

というように書くことも多いようです．それは，$x<y$ とか $x=y$ という書き方と同じ流儀によるものであります．

2.　n 変数の命題関数のことを **n 変数の述語**といいます．要するに，〈命題関数〉とか〈関係〉とか〈述語〉という言葉はすべて同義語とし，時に応じて適当に使いわけようというのです．本書においては，主として〈述語〉という言葉を使います．

$$\forall \quad と \quad \exists$$

という論理記号を研究する範囲を**述語論理**とよぶのは，そのためなのであります[1)]．

これに反して，命題結合記号

$$\to,\quad \wedge,\quad \vee,\quad \neg$$

だけを研究する範囲を**命題論理**といいます．そこでは，命題を主語と述語とに分離して考える必要は起らず，個々の命題をそれ以上に分析せずに，そのままでとり扱えば十分だからであります．

もっとも，$\forall$ と $\exists$ だけを他の論理記号と切り離して研究するのはあまり意味がないので，述語論理では，結局はすべての論理記号をとり扱うことに

1)　〈述語論理〉のことを**関数論理**とよぶこともあります．それは，述語というものが，命題関数という1種の関数であることに由来するのであります．

なります．その意味で，命題論理は述語論理の一部分であると考えるのが普通の考え方であります．

3.　２変数以上の述語に対しても〈条件〉という言葉を使います．たとえば，２変数を例にとっていえば，

$$\forall x \forall y (F(x,y) \to G(x,y))$$

という命題をやはり〈FはGの**十分条件**である〉とか〈GはFの**必要条件**である〉と読むのであります．

4.　２変数の述語 $F(x,y)$ において，この変数 x に定数 e を代入すると，$F(e,y)$ という１変数 y の命題関数が得られます．そして，この命題関数から

$$\forall y F(e,y) \quad \text{および} \quad \exists y F(e,y)$$

という２つの命題が得られます．

いま，われわれは，

$$\forall y F(x,y) \quad \text{および} \quad \exists y F(x,y)$$

という表現によって，変数 x に任意の定数 e を代入したとき，それぞれ，

$$\forall y F(e,y) \quad \text{および} \quad \exists y F(e,y)$$

という命題を値としてもつような，そういう１変数 x の命題関数を表わそうと思います．

それはちょうど，２変数 x, y の関数 $f(x,y)$ に対して，

$$\int_0^1 f(x,y)dy$$

が１変数 x の１つの関数を表わしているのと，まったく同様です．

$\forall y F(x,y)$ および $\exists y F(x,y)$ が１変数 x の命題関数である以上，これらから，それぞれ，

$$\forall x \forall y F(x,y), \qquad \exists x \forall y F(x,y)$$

および

$$\forall x \exists y F(x,y), \qquad \exists x \exists y F(x,y)$$

という命題を作ることができます．

5.　　　　$\forall x \exists y F(x,y)$　　および　　$\exists y \forall x F(x,y)$

という2つの命題は，外見上やや似ていますが，内容の違う命題です．たとえば，x や y を自然数を表わす変数と考えた場合，

$$\forall x \exists y (x < y)$$

は正しい命題を表わしますが，

$$\exists y \forall x (x < y)$$

によって表わされる命題は間違っています．

$\forall x \exists y (x < y)$ というのは，どんな自然数 n に対しても

$$\exists y (n < y)$$

が正しいということです．もし $y=n+1$ とおけば，もちろん $n < y$ となりますから，$n < y$ となる自然数 y は存在します．すなわち：$\exists y (n < y)$．

$\exists y \forall x (x < y)$ というのは，

$$\forall x (x < n)$$

という命題を正しくするような n が存在するということです．しかし，すべての自然数より大きい自然数 n などというものは存在しません．

6.　上と同様に，

$$\forall x \forall y F(x,y) \qquad \text{および} \qquad \forall y \forall x F(x,y)$$

というのも異なった命題です．少なくとも，その表現形式においては異なるし，そのことは，これらの命題を作る道筋が異なっていることを示しているからです．

いま，

$$\forall y F(x,y) \quad \text{という } x \text{ の命題関数を} \quad G(x)$$
$$\forall x F(x,y) \quad \text{という } y \text{ の命題関数を} \quad H(y)$$

とおけば，$\forall x \forall y F(x,y)$ というのは $\forall x G(x)$ のことであり，$\forall y \forall x F(x,y)$ とは $\forall y H(y)$ のことであります．

しかし，これら2つの命題の内容にまで立ちいって考えてみますと，これらは同じ内容の命題の異なった表現と考えることができます．少なくとも，一方が正しければ，かならず他も正しいのであります．同様のことが

$$\exists x \exists y F(x,y) \quad \text{と} \quad \exists y \exists x F(x,y)$$

についてもいえます．そして，これらのことは，第2章で述べます〈演繹〉の一般規則を用いて証明することができるのですが（第7章，§3 の2），そ

れまでのところ，$\forall x\forall yF(x,y)$ と $\forall y\forall xF(x,y)$，および，$\exists x\exists yF(x,y)$ と $\exists y\exists xF(x,y)$ とは，それぞれ，一応異なった命題と考えておくことにいたします．

〈すべての x，y に対して $F(x,y)$〉という命題をわれわれの方法で表現するには，やはり

$$\forall x\forall yF(x,y) \qquad \text{あるいは} \qquad \forall y\forall xF(x,y)$$

と書く以外ないようです．この2つの命題が同一の内容を示しているということが確定していないうちは，〈すべての x，y に対して……〉というのには2通りの解釈があることになります．結果的には，それらは同じことになるのではありますが…….

〈$F(x,y)$ という x および y が存在する〉という命題についても，情況は同様であります．

まえに，

$$\forall x\forall y(F(x,y)\rightarrow G(x,y))$$

を〈F は G の十分条件〉などと読んだときにも，その裏には，この命題を

$$\forall y\forall x(F(x,y)\rightarrow G(x,y))$$

と書いても同じことであるという気持がひそんでいるに違いありません．

7.　$\forall x$ あるいは $\exists x$ という限定作用素を1つ，n 変数の述語に作用させますと，$n-1$ 変数の述語ができます．たとえば，3変数の述語 $F(x,y,z)$ に対して，

$$\forall xF(x,y,z)$$

は，y と z を変数とする2変数の述語を表わし，

$$\exists z\forall xF(x,y,z)$$

は，y を変数とする1変数の述語を表わしています．

§ 8.　自由変数と束縛変数

1.　1つの変数 x を含む命題 $F(x)$ は，それは厳密な意味では〈命題〉ではなく，〈1変数の命題関数〉を表わすのでした．しかしながら，その命題関数 $F(x)$ から作られる

$$\forall xF(x) \qquad \text{および} \qquad \exists xF(x)$$

はともに〈命題〉を表わします．これらの表現はいずれも x という変数を含

んでいるにもかかわらず，それぞれ真偽の定まった1つの命題を表わしているのです．

2変数の命題関数 $F(x, y)$ から作られる

$$\forall x F(x, y) \qquad \text{および} \qquad \exists x F(x, y)$$

は，見かけ上 x と y という2つの変数を含んでいますが，これらはともに，1変数 y の命題関数です．そして

$$\forall y \forall x F(x, y) \qquad \text{とか} \qquad \exists y \forall x F(x, y)$$

とすれば，これらはいずれも真偽の定まった命題となります．

このように，$\forall x$ とか $\exists x$ という限定作用素の作用範囲における変数 x は——あるいは，$\forall y$ とか $\exists y$ という限定作用素の作用範囲における変数 y は——まったく見かけ上の変数で，変数の実質的な役割りをはたしておりません．このような〈見かけ上の変数〉のことを，われわれは**束縛変数**とよび，束縛変数でない変数のことを**自由変数**とよんで，これらを区別いたします．

変数を含む命題という言葉をわれわれが用います場合，それに含まれている変数とは，じつは〈自由変数〉として含まれているもののみをいうのでありまして，〈束縛変数〉として含まれているものは勘定に入れません．

例1.　〈方程式 $ax^2+bx+c=0$ は根をもつ〉ということを論理記号を用いて表わせば，

$$(*) \qquad \exists x(ax^2+bx+c=0)$$

となります．もし，変数 a, b, c, x の変域をすべて実数に限れば，これは〈実係数の方程式 $ax^2+bx+c=0$ は実根をもつ〉ということになります．ですから，自由変数 a, b, c にいろいろな実数値を与えますと，(＊)は真な命題ともなり，また，偽な命題ともなります．ですから，(＊)は a, b, c を変数とする3変数の命題関数を表わしています．そして，x は束縛変数です．

例2.　a, b, c, x は実数を表わすものとして，

$$\forall a \forall b \forall c[\exists x(ax^2+bx+c=0) \to b^2-4ac \geqq 0]$$

という表現を考えますと，これは

実係数の方程式 $ax^2+bx+c=0$ が実根をもてば $b^2-4ac \geqq 0$ である

ということを意味します．ここでは，a, b, c, x はすべて束縛変数で，これは正しい命題であります．もし

$$\exists x(ax^2+bx+c=0) \quad を \quad F(a,b,c)$$

$$b^2-4ac \geqq 0 \quad を \quad G(a,b,c)$$

と表わせば，この命題は

$$\forall a \forall b \forall c(F(a,b,c) \to G(a,b,c))$$

ということで，要するに〈G が F のための１つの必要条件である〉ということを示しているだけです．その内容は，方程式 $ax^2+bx+c=0$ の係数 a, b, c などというものには，まったく何の関係もありません．

2.　〈束縛変数〉というものは，何も ∀ や ∃ とともにのみ現われるわけではありません．たとえば，関数 $f(x)$ の定積分

$$\int_0^1 f(x)dx$$

というのは，見かけ上 x という変数を含んではいますが，それは１つの〈数〉を表わす表現であって，けっして〈x の関数〉を表わしているのではありません．また，２変数関数 $f(x,y)$ から得られる定積分

$$\int_0^1 f(x,y)dx$$

というのも，x と y という２つの変数を見かけ上含んではいますが，この表現は〈１変数 y の関数〉を表わしているのでしょう．このような x は，このいずれの場合においても，事実上〈束縛変数〉と名づけるべきものなのであります．

たとえば，定積分 $\int_0^1 f(x)dx$ のことは

$$\int_0^1 f$$

と書く方が理論上はスッキリするわけです．事実，$f(x)$ が $\sin x$ などという場合には

$$\int_0^1 \sin$$

と書けばよいのですが，$f(x)$ が x^2 などの場合にはチョットした苦労を要しますし，さらには

$$\int_0^1 x^2y\,dx \qquad とか \qquad \int_0^2\int_0^1 x^2y\,dxdy$$

などをこの方式で書こうとすると，かなり面倒です．

$\forall xF(x)$ とか $\exists xF(x)$ なども，それぞれ

$$\forall(F) \qquad および \qquad \exists(F)$$

と表わせばよいのですが，上と同様な理由で，実際的には不便なことが多いのであります．

§9.　変数を含む命題

われわれは，これまでのところ，真偽の確定している命題のみを〈命題〉とよび，〈変数を含む命題〉は，それは〈命題関数〉を表わす1種の表現形式であるとして，命題の範囲から除いてきました．しかし，そのように命題の範囲を限定して考えることは，あまり実際的ではありません．

F を n 変数の命題関数とするとき，変数 a_1, a_2, $\cdots$, a_n を用いた表現

$$F(a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

というようなものをも，われわれは今後〈命題〉とよぶことにします．あるいは，**自由変数 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_n$ を含む命題**といいます．このような表現を〈命題〉と考える場合には，それに含まれる自由変数 a_1, a_2, $\cdots$, a_n は，〈変数〉と考えるよりは，むしろ〈定数〉と考えるほうが理解しやすいかもしれません．ただそれは，特定の定数ではなくて，**任意の**定数を代表しているのであります．

これは，n 変数の関数 f に対して

$$f(a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

は〈数〉を表わす——自由変数 a_1, a_2, $\cdots$, a_n の値を定めれば1つの数を表わす——というのと，同じ思想によるものであります．

1.　たとえば，2次関数

$$ax^2+bx+c$$

というものを考えてみましょう．しかし，よく考えてみると，これは4つの変数 a, b, c, x に関する1つの3次関数を表わしているのです．このように，同じ式が2次関数と考えられたり3次関数と考えられたりするのはなぜ

かといえば，それは〈目のつけどころ〉の違いであります．x という変数に目をつけて

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

と考えれば，この f は２次関数であり[1]，

$$g(a,b,c,x)=ax^2+bx+c$$

とすれば，この g は３次関数です．あるいは，

$$h(a,c)=ax^2+bx+c$$

と考えれば，h は１次関数で，

$$k(y)=ax^2+bx+c$$

とおけば，この k は定数値関数［０次関数］です．また，

$$\varphi(x)=x^n$$

という φ は n 次関数とよばれるのでしょうが，

$$\phi(n)=x^n$$

と考えれば，この ϕ は指数関数というものになります．

要するに，〈関数〉というのは〈対応〉であります．

$$ax^2+bx+c \qquad \text{とか} \qquad x^n$$

とかいう式を利用して，何を何に対応させるか，という態度をきめたうえで，はじめてその式によって表わされる関数というものがきまるわけです．

2.〈命題関数〉というものも，これとまったく同様な状況にあります．変数を含む命題，たとえば

$$ax^2+bx+c>0$$

というものも，これを１つの命題の表現と考える限り，これは単にこれだけのものでしかありません．しかし，もし x という変数に着目して，これを $F(x)$ と表わしたとすれば，この F は１つの命題関数——または〈述語〉——と考えられます．このように，〈関数〉とか〈命題関数〉とかいうものは，主としてわれわれの〈態度〉あるいは〈心構え〉というようなものに関係し

1)〈ただし，$a\neq 0$〉などというケチなことは，ここでは言わぬことにいたします．

てきまるものであり，表現形式そのものから一意的に定まるものではありません．今後，ある命題を $F(x)$ と表わしたからといって，この命題が x だけを自由変数として含んでいるというのではありません．ただ，とくに x という変数に着目して，この命題を考えているということであります．でありますから

命題 $F(x)$ は，x 以外の自由変数を含んでいるかもしれないし，また x という自由変数を含んでいないかもしれない

のであります．

たとえば，〈定数を微分すると0〉ということを

$$\frac{dc}{dx}=0$$

と表わすときのように，c という1つの定数を表わす記号を，そのまま〈c という値をとる定数値関数〉を表わす記号として流用することもあります．これと同様に，A という1つの命題を表わす記号を〈つねに A という値をとる命題関数〉を表わす記号として用いることもあります．

3.　現在の記号論理学における最も普通の表記法によれば，すべてを〈命題〉の次元に引きもどして考えることになっています．たとえば，

$$\forall x(F(x)\to G(x))$$

という命題を考える場合にも，まず，$F(x)$ および $G(x)$ という2つの命題から

$$F(x)\to G(x)$$

という命題を作り，ここではじめて x を変数と考えて，命題

$$\forall x(F(x)\to G(x))$$

を作る，という順序になっているのです．

これはちょうど，

$$\int_0^1 (f+g)$$

という表現を用いずに，

$$\int_0^1 (f(x)+g(x))dx$$

という表現を用いることに相当しています．

$\int_0^1 (f+g)$ という表現における + という記号は

$$\forall x[(f+g)(x)=f(x)+g(x)]$$

として定義された〈関数の加法〉を表わしていますが，$\int_0^1 (f(x)+g(x))dx$ における + という記号は，〈数の加法〉を表わしているに過ぎません．

4. 変数を含む命題を1つの〈命題〉の表現とみる場合には，それに含まれている自由変数は〈定数〉と考えるのがわかりよい，と言いました．しかし，同一の表現を〈命題〉と考えるか〈命題関数〉と考えるかは，われわれがその表現をみるときの〈態度〉というか〈目のつけどころ〉といいますか，そのようなわれわれの主観によって異なるのでありますから，自由変数というものを〈定数〉と思うか〈変数〉と思うかも，その主観によって左右されるのであります．$F(x)$ という表現を〈命題〉とみる場合には，自由変数 x は何か或る〈定数〉を代表するものと考えればよいでしょう．しかし，同じ $F(x)$ という表現をみるときにも，その表現から $\forall xF(x)$ とか $\exists xF(x)$ とかいう命題を作ろうとしている場合のように，それを〈命題関数〉と思いたい場合には，x を〈変数〉と考えればよいわけです．

このように，〈自由変数〉というものは，ときと場合に応じて〈定数〉とも〈変数〉とも自由自在に見かたを変えることができるのです．しかし，ここでいう〈定数〉とか〈変数〉とかいうのは，あくまでもわれわれの〈心の持ちかた〉の問題であって，形式的にも，また実質的にも，そこに何らの差異があるわけではありません．事実は，〈自由変数〉と名づけられている文字がそこにあるというだけのことであります．

もし，どうしても〈変数〉としか考えられぬ文字があるとすれば，それは〈束縛変数〉であります．日常語による表現においては，自由変数・束縛変数の区別がつねに明瞭であるとは限りませんが，本質的には，それは束縛変数として用いられているのです．

例 1. 〈$x=1$ は $x^2=1$ となるための十分条件である〉というときの x は，まさしく〈変数〉であります．この命題のいわんとするところは，

$$\forall x(x=1 \to x^2=1)$$

ということであって，x を自由変数とする

$$x=1 \to x^2=1$$

ではありますまい．

例 2. 〈2次関数 ax^2+bx+c〉というとき，x は変数，a, b, c は定数と考えているのでしょう．しかし，ここで〈2次関数〉というのは，けっして

$$ax^2+bx+c$$

という表現そのものを指しているのではありません．そうではなくて，2次関数 ax^2+bx+c とは

$$\forall x(f(x)=ax^2+bx+c)$$

となる関数 f のことをいうのであります．してみれば，x は実質的に束縛変数であります．

例 3. 〈2次関数 ax^2+bx+c の値はつねに正〉という命題は

$$\forall x(ax^2+bx+c>0)$$

と表わされますから，この場合には，x が束縛変数であることはハッキリしています．そして，a, b, c は〈定数〉とよばれる自由変数であります．

例 4. いま，a, b, c, x はすべて実数を表わすものとして，つぎの命題を考えてみましょう：

> x の関数 ax^2+bx+c の値がつねに正となる必要十分条件は，$a>0$ であって $b^2-4ac<0$ であるか，または，$a=b=0$ で $c>0$ となる，ということである．

これを論理記号を用いて書いてみると，

$$\forall a \forall b \forall c\{\forall x(ax^2+bx+c>0) \rightleftarrows [(a>0 \wedge b^2-4ac<0) \vee ((a=0 \wedge b=0) \wedge c>0)]\}$$

となります．したがって，a, b, c, x はすべて束縛変数であります．ですが，われわれは，何か a, b, c というものを〈定数〉とよびたいような衝動にかられます．たしかに，

$$\forall x(ax^2+bx+c>0)$$

とか

$$(a>0 \wedge b^2-4ac<0) \vee ((a=0 \wedge b=0) \wedge c>0)$$

という部分をとり出せば，このいずれの命題においても a, b, c は自由変数ですから，それを定数と考えることは至当です．しかし，この部分的な２つの命題を

$$F(a,b,c) \qquad \text{および} \qquad G(a,b,c)$$

と表わせば，最初にあげた全命題は

$$\forall a \forall b \forall c (F(a,b,c) \rightleftarrows G(a,b,c))$$

となり，それは単に〈G は F のための必要十分条件〉ということで，その内容は定数 a, b, c などというものに何の関係もありません． a, b, c を定数とするのは，それは局部的な考え方であって，大局的には，それらはやはり〈変数〉なのであります．

> 完全に大局的（global）な観点に立てば，自由変数の本質もまた，やはり〈変数〉であります．ただ，局部的（local）には，それを〈定数〉と考えると考えやすい場合が多い，というに過ぎません．

5.　〈定数〉というものは，すべて自由変数の別名である，と考えられないわけではありません．しかし，普通には，円周率を表わす π とか，自然対数の底を示すときの e，あるいは，実数としての０とか１のようなものは，自由変数とは考えません．それは〈本当の定数〉であります．

記号論理学において厳密な意味で〈定数〉という言葉を使うときは，このような〈本当の定数〉を意味しているのであります．

6.　実際問題としては，同じ文字を，自由変数としても束縛変数としても用いる，ということが多いのです．それは，これまでに挙げた例において，すでに何度も見てきた通りであります．しかし，とくに原理的な話をする場合には，文字のうえでも，それらを区別しておく方が便利です．

今後は，**自由変数**としては，主として

$$a, \ b, \ c, \ \cdots$$

のようなアルファベットの初めのほうの小文字を用い，**束縛変数**を表わすには，主として

$$x,\ y,\ z,\ \cdots$$

のようなアルファベットの終りのほうの小文字を用いることにしようと思います．

§ 10. 論理記号の用例（その2）

この § においては，とくに断わりのない限り，変数の変域はすべて自然数に限ることにします．

1.　＝と＋という記号を用いれば，$a<b$ という命題は

$$\exists x(a+x=b)$$

と表わすことができます．これを，$a<b$ という2項関係の定義と考えてもよろしい．

$a\leqq b$ というのは，もちろん

$$a<b \vee a=b$$

として定義することができます．

2.　〈b は a で割りきれる〉ということを

$$a|b$$

と表わします．それは，

$$\exists x(ax=b)$$

ということです．$a|b$ のことを〈a は b の約数である〉とか〈b は a の倍数である〉とも読みます．

3.　〈1と自分自身以外に約数をもたぬ数〉のことを**素数**(prime number)といいます．〈a は素数である〉という命題を Prim a と表わすことにしますが，これは

$$\forall x[x|a \to (x=1 \vee x=a)]$$

ということです．

3.1.　まえの2において，$a|b$ は $\exists x(ax=b)$ のことである，と書きました．だからといって，$x|a$ というのは［$\exists x(ax=b)$ の a に x を代入し，b に a を代入して］

$$\exists x(xx=a)$$

である，などとされては困るのです．これでは，

$$\exists x(x^2=a) \qquad [a\text{は平方数である}]$$

ということになってしまって，$x|a$ ということにはなりません．

このような場合には，$a|b$ をまず

$$\exists y(ay=b)$$

と考えなおしておいて，$x|a$ とは

$$\exists y(xy=a)$$

のことである，とするのです．あるいは，Prim a のほうを

$$\forall y[y|a \to (y=1 \vee y=a)]$$

とでも考えねばなりません．

このことを一般的に述べれば，$F(a)$ という命題から $\forall xF(x)$ とか $\exists xF(x)$ を作る場合，$F(a)$ のなかですでに，自由変数 a が x という同じ束縛変数を用いた $\forall x$ とか $\exists x$ という限定作用素の作用範囲にある場合には，$\forall xF(x)$ および $\exists xF(x)$ という命題を作ってはいけない，ということであります．もし，そのような命題を作ったとしても，それは，われわれの期待しているのと違った内容をもつ命題となるおそれがあるからなのであります．それは，ちょうど，a の関数 $\lim_{x\to 0} f(x,a)$ から作られる極限

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)$$

のことを

$$\lim_{x\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,x)$$

と書くようなものであります．

実際には，$F(a)$ から $\forall xF(x)$ あるいは $\exists xF(x)$ を作る場合，そこで用いる束縛変数 x を $F(a)$ のなかで１度も用いられていないものに制限しておけば，一番安全です．

3.2. 〈素数〉の定義を上記のようにいたしますと，1 も素数になってしまいます．しかし，数学においては，1 だけは素数の仲間にいれないのです．ですから，Prim a の本当の定義は

$$\forall x[x|a \to (x=1 \vee x=a)] \wedge \neg(a=1)$$

ということになります．

4. 〈素数は無限にある〉というのは，ユークリッド（Εὐκλείδης）によって証明されたといわれる有名な定理です．論理記号を用いて，これをどう表わすか？〈……は無限にある〉という述語を使えば，それは簡単ですけれども，それでは，定理の意味をハッキリさせるのに何の役にもたちません．

〈……は無限にある〉という述語を一般的に定義しようと思いますと，それは結構むずかしいのです．しかし，話を自然数に限っておくならば，たとえば，上のユークリッドの定理は

$$\forall x \exists y (x < y \wedge \mathrm{Prim}\, y)$$

と書くことができます．

4.1. 一般に，自然数を元とする集合 F が無限集合であるということは

$$\forall x \exists y (x < y \wedge y \in F)$$

と表わされます．

F が有限集合であれば，F には最大数があります．その最大数を a とすれば，

$$\exists y (a < y \wedge y \in F)$$

という命題はもはや成立しません．したがって

$$\forall x \exists y (x < y \wedge y \in F)$$

という命題は正しくありません．

逆に，$\forall x \exists y (x < y \wedge y \in F)$ という命題が正しくなかったとすれば，

$$\neg \exists y (n < y \wedge y \in F) \qquad [\text{命題 } \exists y (n < y \wedge y \in F) \text{ が間違い}]$$

となるような自然数 n が必ず存在します．そうして，そのような n に対しては，もちろん

$$\forall y (y \in F \rightarrow y \leqq n)$$

となりますから，F の元の個数は n 個以下です．したがって，F は有限集合であります．

4.2. 変数の変域を自然数に限らず，なにかある〈順序集合〉というものにしますと，

$$\forall x \exists y (x < y \wedge y \in F)$$

という命題は〈F が無限集合〉ということを表わしているのではなく，〈集合 F は上に有界でない〉ということを意味しているのです．たとえば，実数の全体のなかで考えると，区間

$$\{ x \mid 0 < x < 1 \}$$

は上に有界ですけれども，それは無限集合です．

自然数だけを対象として考える場合には，〈上に有界でない集合〉というのがちょうど〈無限集合〉というものと一致しますので，たとえば〈ユークリッドの定理〉を上述のように表わすことができたのです．われわれは，ある意味での偶然的な事実を利用したのであります．

4.3.　自然数に関する任意の述語 F に対して，

$$\forall x \exists y (x < y \wedge F(y))$$

という命題を $\Phi(F)$ と表わすことにすれば，この $\Phi(\quad)$ が〈……は無限にある〉ということを表わすことになります．それは，われわれがここで単に〈述語〉とよんでいるところの〈自然数に関する述語〉ではありません．それは，〈述語に関する述語〉であり〈性質の性質〉であります（§5 の末尾を参照）．ですから，ユークリッドの定理の表現を与える際に，〈……は無限にある〉という述語を使えば簡単である，などと書きましたが，そこで言う〈述語〉というのは〈述語の述語〉，すなわち**第 2 階の述語**の意に解していただかねばなりません．

ここで私の言いたかったのは，つぎのことであります：

たとえば〈素数は無限にある〉というユークリッドの定理も，根源にまでさかのぼってみれば，じつは，＝と加法・乗法の記号，ならびに自然数を代表するいくつかの変数と，あとは論理記号さえ用いれば，それらを組み合わせることによって表現することができる[1]．このように，ある範囲の対象を一般的に代表する変数と，基本概念を表わす少数の記号を用意しておけば，あとは論理記号の助けを借りるだけで，多くの複雑な命題をも記述することができる，ということであります．そして，公理的方法によって整理された数

1)　それを組み合わせて行く順序を示すためには，補助記号としてカッコを用います．カッコを書かずとも誤解のおそれのない場合には，しばしばカッコを省略しますが，原則的には，それは省略せずに書くべきものであります．

学の理論というものは，この事実を如実に示しています．この事実を認識することこそ〈記号論理への第1歩〉であります．この事実なくしては，今日の記号論理学はあり得なかったでありましょう．

第2章　演　　繹

本書でとり扱う〈論理〉は，いわゆる **演繹(えんえき)論理** というものであります．それは，ある一般的な規則にしたがって，いくつかの仮定とか大前提から個々の結論を導く論理をいうのでありまして，個々の事実から一般的法則を見いだそうという**帰納論理**とは違ったものです．数学において〈論理〉という言葉が使われるとき，それはつねに〈演繹論理〉を意味するものと思ってよいでしょう．もちろん，弁証法の論理というようなものは，いまは問題外であります．

§1.　→について

演繹的推理の説明のまず第1として，

$$A \to B$$

という形の命題をとりあげましょう．これは，A という仮定から B が導かれる，すなわち，命題 A から B という命題が演繹される，ということを意味します．ですから，

$$A \qquad \text{および} \qquad A \to B$$

という2つの前提から

$$B$$

という結論を導いてよいでしょう．これを，われわれの推論規則の第1のものといたします．

このような推論を，われわれは，しばしば

$$\frac{A \qquad A \to B}{B}$$

という図式で示します．このように，推論を図式で表わしたものを**推論図**といいます．推論図に現われる A とか B という文字は任意の命題を表わす，ということにすれば，このような推論図で１つの推論規則を表わしたことにもなるわけです．たとえば，上に述べた推論図で表わされた推論規則は modus ponens という名でよばれています．これを日本語では**構成的仮言的三段論法**というのですが，あまり長ったらしいので本書では原語で modus ponens とよぶことにします[1)]．

例 1.

$$\dfrac{\dfrac{A \quad A \to B}{B} \qquad \dfrac{A \quad A \to (B \to C)}{B \to C}}{C}$$

これは３つの modus ponens をつみ重ねてできた１つの**演繹**（えんえき，deduction）を示しています．要するに，

$$A, \qquad A \to B, \qquad A \to (B \to C)$$

という３つの仮定から１つの結論

$$C$$

が導かれることの証明であります．

例 2.　例１における演繹において，

$$A \to B \qquad と \qquad A \to (B \to C)$$

の２つを**大前提**と考えれば，それは，A という仮定から C を導く証明ともみなされます．すなわち，上の２つの大前提のもとで，

$$A \to C$$

が証明されたものと考えてよいでしょう．そのことを，われわれは，つぎのような図で示します：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{A} \quad A \to B}{B} \qquad \dfrac{\overset{1}{A} \quad A \to (B \to C)}{B \to C}}{C}}{A \to C}\ 1$$

1)　英語でも constructive hypothetical syllogism というので，長いのは日本語の責任ではないようです．

ここで，一番上にある2つの A の上に書いてある1という記号は，A という仮定が，最後の推論

$$\frac{C}{A \to C}$$

を行なったときに除かれた，ということを意味しています．とにかく，最後の結論

$$A \to C$$

を成りたたせるために必要な仮定は，

$$A \to B \qquad \text{と} \qquad A \to (B \to C)$$

という2つの大前提だけであります．そして，上に述べました図式は，この2つの仮定から

$$A \to C$$

という結論を導く〈演繹〉を図示しているのであります．

例 3.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{A} \quad A \to B}{B} \qquad \dfrac{\overset{1}{A} \quad \overset{2}{A \to (B \to C)}}{B \to C}}{C}}{A \to C}\,1}{(A \to (B \to C)) \to (A \to C)}\,2$$

これは，

$$A \to B$$

という仮定から

$$(A \to (B \to C)) \to (A \to C)$$

を導く演繹です．この演繹図式において，

$$A \to (B \to C)$$

の上に書いてある2という数字は，この命題が最後の推論によって仮定から除かれた，ということを示しています．

例 4.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{A}\quad \overset{3}{A\to B}}{B}\qquad \dfrac{\overset{1}{A}\quad \overset{2}{A\to(B\to C)}}{B\to C}}{C}}{A\to C}\,1}{(A\to(B\to C))\to(A\to C)}\,2}{(A\to B)\to[(A\to(B\to C))\to(A\to C)]}\,3$$

これは，なんらの仮定なしで

$$(A\to B)\to[(A\to(B\to C))\to(A\to C)]$$

という命題が成立するということの証明です．

すべての仮定が除かれてしまった演繹のことを，われわれは **証明** (proof) とよびます．とくに，証明が図式的に表わされているということを強調したいときには，それを**証明図**といいます．例 4 にあげた証明図は

$$(A\to B)\to[(A\to(B\to C))\to(A\to C)]$$

という命題の証明を表わしています．

〈演繹〉と〈証明〉という概念を厳密に区別して使いわける必要は何もありません．ここでは，ただ慣行にしたがった呼び名を説明したに過ぎないのであります．ですから，読者は，このような名称に関する枝葉の事項にあまり細かい神経を使われぬが得策かと思います．

以上にあげました証明あるいは演繹に用いられている推論を整理いたしますと，つぎの 2 種類に分類することができます．その 1 つは〈**→ の導入に関する推論規則**〉にしたがうもの，他の 1 つは〈**→ の除去に関する推論規則**〉にしたがうものであります．とくに，〈→ の除去〉と申しますのは，前に述べました modus ponens そのものにほかなりません：

→ - 導入： $\dfrac{\overset{[\boldsymbol{A}]}{\boldsymbol{B}}}{\boldsymbol{A\to B}}$　　**→ - 除去：** $\dfrac{\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{A\to B}}{\boldsymbol{B}}$

〈→ - 導入〉という推論規則の上に［A］と書きましたのは，B を導く演繹に用いられている仮定のうちの A という仮定は，$A\to B$ を導く演繹に対して除いて考えよ，ということであります．くわしくは，

$$\frac{B}{A \to B}$$

という推論を最後に用いる演繹における仮定とは，B に到る演繹での仮定のうちの A 以外のものすべて，ということを意味します．

〈→-除去〉の方には，こういう ただし書き はありません．ですから，

$$\frac{A \quad A \to B}{B}$$

という推論を最後にもつ演繹における仮定は，A に到る演繹の仮定ならびに $A \to B$ に到る演繹の仮定の合計であります．

例 5.　$(A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$ の証明：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{2}{B} \qquad \dfrac{\overset{1}{A} \quad \overset{3}{A \to (B \to C)}}{B \to C}\ \to\text{-除去}}{C}\ \to\text{-除去}}{A \to C}\ \to\text{-導入 }1}{B \to (A \to C)}\ \to\text{-導入 }2}{(A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))}\ \to\text{-導入 }3$$

例 6.　$A \to A$ の証明：

$$\dfrac{\overset{1}{A}}{A \to A}\ \to\text{-導入 }1$$

この例6の示すように，→-導入

$$\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ B\end{matrix}}{A \to B}$$

において，B に到る演繹の仮定 A というのが，命題 B そのものであることもあり得るのであります．そのときの B に到る演繹というのは，命題 B だけから成りたっているので，その B は仮定でもあり，また結論でもあるのです．

問　$A \to [(A \to B) \to B]$ の証明図を書け．

§ 2.　∧について

∧に関する推論規則も，やはり〈∧の導入〉と〈∧の除去〉の2種類を

考えます．そうして，除去に関する推論規則のほうは，さらに2つの形にわかれています：

$$\wedge\text{-導入：}\quad \frac{\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{B}}{\boldsymbol{A}\wedge \boldsymbol{B}}\qquad\qquad \wedge\text{-除去：}\quad \frac{\boldsymbol{A}\wedge \boldsymbol{B}}{\boldsymbol{A}}\qquad \frac{\boldsymbol{A}\wedge \boldsymbol{B}}{\boldsymbol{B}}$$

$A\wedge B$ は，A と B の両方が成立するとき，および，そのときに限って成立するということでありますから，そのことは，上の $\wedge$ の導入および除去に関する推論規則によって完全に表現されております．

例 1.　$((A\wedge B)\to C)\to(A\to(B\to C))$ の証明：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{2}{A}\quad \overset{1}{B}}{A\wedge B}\,\wedge\text{-導入}\qquad \overset{3}{(A\wedge B)\to C}}{C}\,\to\text{-除去}}{B\to C}\,\to\text{-導入 }1}{A\to(B\to C)}\,\to\text{-導入 }2}{((A\wedge B)\to C)\to(A\to(B\to C))}\,\to\text{-導入 }3$$

例 2.　$(A\to(B\to C))\to((A\wedge B)\to C)$ の証明：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{A\wedge B}}{B}\qquad \dfrac{\dfrac{\overset{1}{A\wedge B}}{A}\quad \overset{2}{A\to(B\to C)}}{B\to C}}{C}}{(A\wedge B)\to C}\,1}{(A\to(B\to C))\to((A\wedge B)\to C)}\,2$$

問　$A\to(B\to(A\wedge B))$ の証明図．

例 3.　$B\to(A\to B)$ の証明：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{A}\quad \overset{2}{B}}{A\wedge B}}{B}}{A\to B}\,1}{B\to(A\to B)}\,2$$

注意　$\to$ の導入に関する推論規則

$$\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ B\end{matrix}}{A\to B}$$

においては，B に到る演繹は仮定 A が1度も使われていなくてもよいので

す．ですから，例 3 の証明としても，

$$\dfrac{\dfrac{\overset{1}{B}}{A \to B}}{B \to (A \to B)}\,1$$

で十分なのであります．しかし，B に到る演繹において仮定 A が 1 度も使われていないのに →－導入を用いて

$$A \to B$$

を導くのは面白くない，といわれる読者のために，例 3 のような証明図を考えました．このような証明図ができた以上，B に到る演繹に仮定 A が 1 度も用いられていない場合にも，→－導入を遠慮なく使用して

$$A \to B$$

を導くことができます．というのは，例 3 で証明された結果を使って，

$$\dfrac{B \quad B \to (A \to B)}{A \to B}\,\to\text{－除去}$$

とすればよいからであります．

§ 3.　∨について

$$\vee\text{－導入：}\quad \dfrac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}} \quad \dfrac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}}$$

$$\vee\text{－除去：}\quad \dfrac{\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B} \quad \overset{[\boldsymbol{A}]}{\boldsymbol{C}} \quad \overset{[\boldsymbol{B}]}{\boldsymbol{C}}}{\boldsymbol{C}}$$

数学において $A \vee B$［A **または** B］というときには，A および B の**少なくとも一方**が成立するという意味でありますから，〈∨－導入〉については，まず問題はないでしょう．

〈∨－除去〉という推論規則は，〈場合わけの証明〉を意味します．すなわち，$A \vee B$ が成立するときは，

1)　A が成立する場合には，C が成立する

2)　B が成立する場合にも，C は成立する

という 2 箇条を証明すれば，それによって，C が成立することを証明したこ

とになるのであります．のみならず，最後に得られた C のために必要な仮定といえば，それは，$A\vee B$ を導くための仮定，および，1）ならびに 2）を示すときに用いる仮定のうちの A および B 以外のものでありまして，1）および 2）を示す演繹に用いられた仮定 A および B は，最後に得られた結論 C のための仮定としては数えられないのであります．

以上によっておわかりのことと思いますが，上に述べました〈$\vee$-除去〉という推論規則における2箇所の C の上に書いてある［A］および［B］は，A および B という仮定がそれぞれの C を導く演繹には用いられていたとしても，その $\vee$-除去という推論の結論 C に対する仮定からは除かれる，ということを意味しています．要するに，$\vee$-除去の結論たる C のための仮定とは，$A\vee B$ を導くための仮定，および，［A］の下の C を導くための A 以外の仮定，ならびに，［B］の下の C を導くための B 以外の仮定の合計であります.[1)]

注意　$\vee$-除去という推論規則は

$$\frac{A\vee B \qquad A\to C \qquad B\to C}{C}$$

と書いたほうが見やすかったかも知れません．ただ，実質的には，最初に述べた形式の方が単純なのであります．

例　$((A\to C)\wedge(B\to D))\to((A\vee B)\to(C\vee D))$ の証明：

$$\cfrac{\cfrac{\overset{2}{A\vee B}\qquad \cfrac{\cfrac{\overset{1}{A}\qquad \cfrac{\overset{3}{(A\to C)\wedge(B\to D)}}{A\to C}}{C}}{C\vee D}\,\vee\text{-導入}\qquad \cfrac{\cfrac{\overset{1}{B}\qquad \cfrac{\overset{3}{(A\to C)\wedge(B\to D)}}{B\to D}}{D}}{C\vee D}\,\vee\text{-導入}}{C\vee D}\,\vee\text{-除去}\,1}{(A\vee B)\to(C\vee D)}\,2}{((A\to C)\wedge(B\to D))\to((A\vee B)\to(C\vee D))}\,3$$

1）この〈$\vee$-除去〉という推論規則にしたがう推論は，**通常ディレンマ**（dilemma，**両刀論法**）とよばれているものであります．より精密には**単純構成的両刀論法**（simple constructive dilemma）というものです．くわしくは，伝統的な論理学の教科書を参照して下さい．

§ 4.　¬ について

A の否定 $\neg A$ というのは，命題 A が間違っているということを意味する命題です．では，A が間違っていることを〈論理的に〉導くにはどうすればよいかと申しますと，それを最も一般的に通用する方法として述べますならば，A という仮定のもとに**矛盾**を導けばよい，ということになります．

すると今度は，〈矛盾〉とは何か，ということになりますが，矛盾とは，要するに〈起り得べからざること〉であります．〈矛盾〉という言葉を〈起り得べからざること〉といいかえても，とくに意味がハッキリするというわけのものではありませんが，矛盾を〈論理的な矛盾〉というものにしぼるならば，ある程度その概念を明確に規定することはできます．すなわち，論理的矛盾とは，ある命題 A とその否定命題 $\neg A$ とが同時に導かれることを意味します．

以上の説明を否定と矛盾の定義と解するならば，そこには１つの循環論法 (vicious circle) が含まれています．〈否定〉の定義には〈矛盾〉の概念が用いられ，〈矛盾〉の定義には〈否定〉という概念が用いられているからです．否定あるいは矛盾の概念をより明確に規定することは後にゆずるとして (§7)，とにかく，ここでは，否定の概念と矛盾の概念とが互いに密接に相関連しているということに注意して戴ければ十分なのであります．

さて，われわれは**矛盾**というのを

$$\curlywedge$$

という記号で表わし，これを１つの命題と認めます．それは１つの**間違った命題**または**偽な命題**であります．

この矛盾命題 $\curlywedge$ を用いますと，¬ に関する推論規則はつぎのように述べられます：

$$\neg\text{-導入：}\ \frac{\begin{matrix}[A]\\ \curlywedge\end{matrix}}{\neg A} \qquad \neg\text{-除去：}\ \frac{A \quad \neg A}{\curlywedge}$$

〈¬-導入〉は，A という仮定から矛盾 $\curlywedge$ が導かれれば，$\neg A$ ［すなわ

ち，A **でない**］と結論してよい，ということを意味します．そして，$\neg A$ を導くための仮定とは，矛盾 人 を導くに要した仮定のうちの A 以外のすべてであります．人 の上に書いた［A］は，$\neg A$ を導く演繹の仮定から A を除くということを意味しています．

〈¬-除去〉は，任意の命題 A に対して，A とその否定 $\neg A$ がともに導かれたならば，それらを導く仮定のすべてを合わせれば，それから〈矛盾〉が導かれたと言う，ということにほかなりません．

例　$(A\to B)\to(\neg B\to\neg A)$ の証明：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{A}\qquad \overset{3}{A\to B}}{B}\qquad \overset{2}{\neg B}}{\text{人}}\ \neg\text{-除去}}{\neg A}\ \neg\text{-導入}\,1}{\neg B\to\neg A}\ 2}{(A\to B)\to(\neg B\to\neg A)}\ 3$$

この例において証明されたのは，

$$A\to B$$

という命題が成立すれば，その**対偶**

$$\neg B\to\neg A$$

もまた成立するという，よく知られた事実であります．

問　$(A\to\neg B)\to(B\to\neg A)$ の証明図．

§5.　∀について

$$\forall\text{-導入：}\quad \frac{\boldsymbol{F(a)}}{\boldsymbol{\forall x F(x)}}\qquad\qquad \forall\text{-除去：}\quad \frac{\boldsymbol{\forall x F(x)}}{\boldsymbol{F(t)}}$$

変数条件　∀-導入を用いる場合には，$F(a)$ に到る演繹の仮定のすべて，ならびに $F(x)$ のなかに自由変数 a が含まれていてはいけない．

と申しますのは，〈∀-導入〉によって $F(a)$ から $\forall xF(x)$［**すべての x に**対して $F(x)$］を導く以上，自由変数 a によって**まったく任意のもの**が表わされていなければなりません．いま，$F(a)$ を導く1つの仮定のなかに a が含まれているとして，その仮定を $A(a)$ と表わすことにすれば，$F(a)$ を導

く演繹によってわれわれの知り得ることは，$A(a)$ という条件をみたす a に対して $F(a)$ が成立する［もちろん，$A(a)$ 以外の仮定のもとで］，ということでありまして，けっして任意の a に対して $F(a)$ が成立するということではありません．すなわち，それからわかることは

$$\forall x(A(x) \to F(x))$$

ということであって，

$$\forall x F(x)$$

ではないのであります．要するに，$F(a)$ を導く演繹の仮定で a を含むものが1つあるたびに，a には1つずつの条件がつけられているということになって，a が**まったく任意**である，ということにならなくなります．

また，もし $F(x)$ が a を含むならば，たとえば，$F(x)$ が

$$a=x$$

を表わしているならば，

$$F(a) \qquad \text{すなわち} \qquad a=a$$

は正しいでしょうが，

$$\forall x F(x) \qquad \text{すなわち} \qquad \forall x(a=x)$$

は一般には［〈もの〉が2つ以上あれば］正しくはないでしょう．ですから，$F(x)$ が a を含む場合には，$F(a)$ が証明されたからといって，$\forall x F(x)$ が証明されるというわけにはいきません．

以上が〈変数条件〉のもつ意味であります．

こんどは，〈∀-除去〉について説明します：

$\forall x F(x)$ という命題が成立する以上，**任意のもの** t に対して命題 $F(t)$ は成立するでしょう．少なくともわれわれは

$$\forall x F(x)$$

という記号によって，そのような命題を表わしているつもりであります．もし $\forall x F(x)$ が幾つかの仮定のもとで成立するというならば，同じ仮定のもとで $F(t)$ も成立します．とにかく∀-除去における t は**任意のもの**でよいのです．しいていうならば，束縛変数 x の変域に属する任意のものであり

ます．そのような〈もの〉をわれわれは**対象**とよびます．しからば，t としては，どんな対象を用いてもよいということになります．

いま，対象というものが数である場合を考えてみましょう．1とか2とかいう数字は特定の数を表わしています．$2+3$ とか 4×5 という式も，それぞれ，5とか20という特定の数を表わしています．また，a^2+ab という文字を含む式も，それは特定の数を表わすというわけにはいきませんが，a とか b という変数が数を代表している限り，やはり数を表わしている，と考えてよいでしょう．このような，特定の対象，あるいは不特定の対象を表わしている式のことを**対象式**[1)]とよびます．そして，〈対象式〉という名称を用いれば，∀-除去における t については，つぎのようにいうことができます：

〈∀-除去〉における t は任意の対象式を表わす．

例　$\forall x(F(x)\to G(x))\to(\forall xF(x)\to\forall xG(x))$ の証明：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\forall xF(x)}}{F(a)}\ \forall\text{-除去}\qquad\dfrac{\overset{2}{\forall x(F(x)\to G(x))}}{F(a)\to G(a)}\ \forall\text{-除去}}{G(a)}}{\forall xG(x)}\ \forall\text{-導入}}{\forall xF(x)\to\forall xG(x)}\ 1}{\forall x(F(x)\to G(x))\to(\forall xF(x)\to\forall xG(x))}\ 2$$

以上で，a は $F(x)$ および $G(x)$ に含まれない自由変数であります．

問　$(A\to\forall xF(x))\to\forall x(A\to F(x))$ の証明図．

§6.　∃ について

∃-導入：$\dfrac{F(t)}{\exists xF(x)}$　　　∃-除去：$\dfrac{\exists xF(x)\qquad\overset{[F(a)]}{C}}{C}$

変数条件　∃-除去において a として表わされている自由変数は $F(x)$ および C に含まれていてはいけません．また，$[F(a)]$ のすぐ下に書いてある C を導くための仮定のうち $F(a)$ 以外のものにも含まれていてはいけないの

1)　対象式のことを英語では term といいます．それは**項**と訳すべきであったかも知れませんが，ここでは意味をとって〈対象式〉とよびました．

であります.

この〈変数条件〉というのは，もし〈∃-除去〉を

$$\frac{\exists x F(x) \qquad \forall x (F(x) \to C)}{C}$$

と書きさえすれば，全然いらなくなってしまいます.

つぎに，その意味を考えてみましょう：

$\exists x F(x)$ [$F(x)$ を成立させる x **が存在する**] ということが導かれた上で，さらにその推論を進めて行く場合，われわれはしばしば，$F(x)$ を成り立たせるような x のうちの**任意の1つ**を a と名づける，というようなことをいたします．1とか2とかいう具体的な対象によって $F(x)$ がみたされる場合には，特別に a と名づけたりする手間をかける必要はなく，a の代わりに1とか2を用いればよいのでありますが，一般には，$\exists x F(x)$ が導かれたというだけでは，$F(x)$ をみたす x の実例を1つも知らないというのが普通のことであります．ですから，そのようなときには，a というような**適当な文字**を用いて，そのような対象の1つを表わすことにするのです.

さて，そのようなときに用いる文字 a は，あくまでも〈適当な〉ものでなければなりません.

1)　たとえば，$F(x)$ が

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

である場合 [数を複素数にまで拡張しておけば]，

$$\exists x F(x) \qquad \text{すなわち} \qquad \exists x (x^3+ax^2+bx+c=0)$$

が成立することは代数学の基本定理の教えるところです．そのとき $F(x)$ をみたす x の1つを a と名づける，といえば，それはやはり〈不適当〉というべきです.

$F(x)$ をみたす対象 x の名称として用いる文字 a は，まず $F(x)$ に含まれていないものを使うのが適当であります.

2)　$F(x)$ をみたす x の1つを a とした以上，$F(a)$ が成立すると仮定するのは当然です．あるいは，それは仮定でも何でもない自明のことであるか

も知れません．ただ，割り切って考えれば，$F(x)$ をみたす x の［任意の］1つを a とする，ということは，$F(a)$ を仮定する，ということにほかならないのであります．

3） $F(a)$ を仮定した上で［すなわち，$F(x)$ をみたす x の1つを a と名づけた上で］推論を続ける場合，a に関する他の仮定を設けることは自由であります．ただ，そのようなときには，a に対して新しい条件がつけられたことになり，したがって，$F(a)$ をみたし，さらにその新しい条件をもみたすような a が存在するかどうかは，また別問題だということになります．すなわち，a を含む仮定のなかで $F(a)$ だけは別格です．a を含む仮定が $F(a)$ だけならば，そのような a の存在は

$$\exists xF(x)$$

によって保証されているからであります．

4） $F(a)$ という仮定だけから導かれる結論 C も，もし C が a という文字を含んでいるならば，それはあくまでも $F(a)$ という仮定に依存しています．それは，a というものが $F(x)$ をみたす x の1つにつけられた名称であるという約束のもとで導かれるものであるからです．しかし，もしその結論 C が a という文字を含まぬならば，もはやその C は $F(a)$ という仮定に依存していません．C を導く演繹中に用いられている a の存在は

$$\exists xF(x)$$

によって保証されているからです．

以上の 1）—4）からわかりますように，a という文字が $F(x)$ に含まれておらず，また C にも含まれていず，しかも C を導く演繹の仮定のうちの $F(a)$ 以外のすべてに a が含まれていないならば，$\exists xF(x)$ がすでに導かれているか，または $\exists xF(x)$ 自身が仮定されている場合には，C を結論してよろしいのです．そして，最後に得られた C のための仮定とは，$\exists xF(x)$ を導くための仮定と，最初の C を導く演繹に用いられた仮定の $F(a)$ 以外のものすべてとの合計です．これが，〈∃-除去〉と〈変数条件〉の意味するところのものであります．

∃-除去において［$F(a)$］と書かれているのは，∃-除去という推論によって得られる結論 C のための仮定からは，その推論の前提となっている C を導くときに用いた仮定 $F(a)$ は除かれる，ということを意味しています．

以上，だいぶ長い説明ではありましたが，そこで用いられている基本的な考え方は，〈∨-除去〉に関するもの（§3）と同種のものであります．∨-除去において，$A \vee B$ が成立するからといって，A が成立するか B が成立するかは，一般には，われわれにわからないのが普通のことです．そこで

$$A \rightarrow C \qquad \text{と} \qquad B \rightarrow C$$

の両方を示して

$$A \vee B \rightarrow C$$

を結論しよう，というのが∨-除去の考え方でありました．もし，対象が有限個

$$e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_n$$

しかない場合を考えれば，$\exists x F(x)$ というのは

$$F(e_1) \vee F(e_2) \vee \cdots \vee F(e_n)$$

ということであります．ですから，その場合には，

$$F(e_1) \rightarrow C,\ F(e_2) \rightarrow C,\ \cdots,\ F(e_n) \rightarrow C$$

のすべてを示すことによって，

$$\exists x F(x) \rightarrow C$$

を結論することができます．このことを，対象が無限に多く存在する場合にも通用するように表現すれば，

$$\forall x (F(x) \rightarrow C)$$

を示すことによって

$$\exists x F(x) \rightarrow C$$

を結論することができる，すなわち：

$$\frac{\exists x F(x) \qquad \forall x (F(x) \rightarrow C)}{C}$$

ということになります．そして

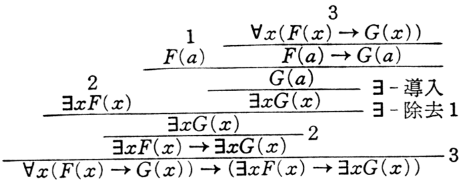
$$\forall x(F(x)\to C)$$

を示すためには，**任意の** a に対して

$$F(a)\to C$$

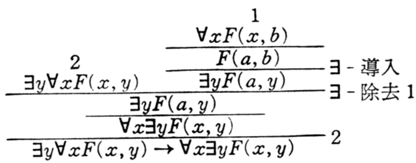
を示す，ということになるのです．a が任意の対象を代表するということを割り切って表現すれば，それは，$F(a)\to C$ を導く演繹の仮定に自由変数 a が含まれていない，ということ，ならびに，$\forall x(F(x)\to C)$ という命題自身のなかにも a は含まれていない，ということになります．これすなわち，∃-除去に対する〈変数条件〉にほかなりません．

例 1.　$\forall x(F(x)\to G(x))\to(\exists xF(x)\to\exists xG(x))$ の証明：



以上において，a は $F(x)$ および $G(x)$ に含まれない自由変数であります．

例 2.　$\exists y\forall xF(x,y)\to\forall x\exists yF(x,y)$ の証明：



以上において，a および b はともに $F(x,y)$ に含まれない**相異なる**自由変数です．もし a と b を同一の自由変数とすれば，∃-除去における変数条件がみたされなくなります．

問　$(A\wedge\exists xF(x))\to\exists x(A\wedge F(x))$ の証明図．

§ 7. 〈矛盾〉について

§4において述べました ¬ に関する2つの推論規則は，じつは，Aの否定 $\neg A$ というものが，矛盾 人 というものを用いて表わされる $A \to$ 人 という命題そのものである，ということを示しているに過ぎません．事実，

$$\neg\text{-導入：}\ \frac{\overset{[A]}{\text{人}}}{\neg A} \qquad \text{および} \qquad \neg\text{-除去：}\ \frac{A \quad \neg A}{\text{人}}$$

において，$\neg A$ を $A \to$ 人 におきかえてみれば，

$$\frac{\overset{[A]}{\text{人}}}{A \to \text{人}} \qquad \text{および} \qquad \frac{A \quad A \to \text{人}}{\text{人}}$$

となって，これらはそれぞれ，→ に関する導入および除去の推論となっています．ですから，要するに，¬ の導入および除去という2つの推論規則は，〈矛盾（人）〉という概念を用いての〈否定（¬）〉の定義と考えることもできるのでありまして，したがって，このように考える限りにおいては，¬ に関する 2 つの規則は，人 という命題の性格を規定することには何の寄与もしていないのであります．簡単にいってしまえば，以上に述べて参りました論理の範囲内では，〈矛盾〉というものが何であるか，全然わかっていないということになります．

具体的に申しますならば，任意の命題を1つ固定しまして，それを

$$\text{人}$$

と表わすことにします．そのうえで，$A \to$ 人 を $\neg A$ と書くことにすれば，それで，¬ の導入と除去の2法則は成立するのであります．

〈起り得べからざること〉を矛盾という，というようなことをいかに述べたからといって，〈起り得べからざる〉という矛盾の性質をどのように用いるかということを明示しない限り，形式的な面においては，われわれにとって何の益するところもありません．

いま，われわれは

(I)　　$[(A \vee B) \wedge \neg B] \to A$

という形の命題を考えてみます．われわれの言語感覚からすれば，これは正しい命題であります．A と B がどんな命題であるにしても，これは正しいのです．ところが，以上に述べて参りました論理の範囲内では，(Ⅰ)という命題は，一般には証明できないのであります．

その間の事情を明らかにする手段として，ここでは，つぎのような方法をとります．すなわち，(Ⅰ)より演繹される結論で，しかも，これまでの論理の範囲内で証明できないことが(Ⅰ)に較べてより明瞭であるものを導くことにします．そうすれば，そのことによって，(Ⅰ)の証明不可能性も明らかになります．何となれば，もし(Ⅰ)が証明可能であるならば，(Ⅰ)だけを仮定にもつ演繹によって導かれる結果は，すべて証明可能となるはずだからであります．

まず，

(Ⅱ)　$$(B\to \text{人})\to(B\to A)$$

という命題は，つぎのようにして，(Ⅰ)から演繹されます：

$$(\mathrm{II})\cdots\cdots\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{2}{B}}{A\lor B}\qquad \dfrac{\dfrac{\overset{1}{B}\quad \overset{3}{B\to \text{人}}}{\text{人}}}{\neg B}\,1}{(A\lor B)\land\neg B}\qquad \overset{(\mathrm{I})}{[(A\lor B)\land\neg B]\to A}}{A}}{B\to A}\,2}{(B\to \text{人})\to(B\to A)}\,3$$

(Ⅱ)という命題の意味するところは，いったい何でしょうか？　それは，B から矛盾 (人) が導かれれば，B から A が導かれる，ということであります．A や B が任意の命題であってよい，ということに注意すれば，これをつぎのように表現することができます：

矛盾を導く命題からは任意の命題が導かれる．

このことを，より端的に表現するためには，B として命題 人 を用いればよいのです．(Ⅱ)の B として 人 を用いれば

$$(\text{人}\to \text{人})\to(\text{人}\to A)$$

となります．ところが，ここにおいて　人 → 人　という命題は証明可能ですから（§1，例6），

（Ⅲ）　$人 \rightarrow A$

が導かれます（→ - 除去）．任意の A, B に対して（Ⅰ）が成立すると仮定すれば，任意の命題 A に対して（Ⅲ）が成立することになります．すなわち：

矛盾（人）からは任意の命題が導かれる

ということです．これを，推論規則の形で

（Ⅲ_1）　$\dfrac{人}{A}$

と表わすこともできます［人 と（Ⅲ）に → - 除去を適用すればよいのです］．

さて，ここで，§6 までに述べてきた論理の範囲では，（Ⅲ）という形の命題を一般的に証明することは，まず絶望的である，ということに注意しましょう．まえに述べました通り，そこまでの論理の範囲では，矛盾命題 人 の性質は何ら規定されてはおらなかったのです．任意の命題を 人 と考えることすらできたのでした．してみれば，もしそこで（Ⅲ）が証明できるならば，任意の命題 C に対して，当然

$$C \rightarrow A$$

も証明できるはずです．しかし，任意の命題 A, C に対してこれを証明することは，まず望むべくもないことでしょう．したがって，（Ⅰ），（Ⅱ），（Ⅲ）のいずれもが，一般的には証明不可能であることは，十分に首肯される事柄なのです．［もっとも，ここに述べた理由だけでは，やや根拠薄弱であるとのそしりをまぬかれ得ません．不満を感じられる読者は，付録Ⅱの §1を見て下さい．］

われわれの考察をさらに一歩すすめるならば，じつは（Ⅰ），（Ⅱ），（Ⅲ）のいずれを認めることもすべて同等であるということを知ることができます．それを示すには，（Ⅲ_1）を認めることによって，（Ⅰ）を証明すれば十分でしょう：

$$(\mathrm{I})\cdots\cdots\ \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{2}{(A\vee B)\wedge\neg B}}{A\vee B}\qquad \overset{1}{A}\qquad \dfrac{\dfrac{\overset{1}{B}\qquad \dfrac{\overset{2}{(A\vee B)\wedge\neg B}}{\neg B}}{\text{人}}}{A}\,(\mathrm{III}_1)}{A}\,\vee\text{-除法}\,1}{[(A\vee B)\wedge\neg B]\to A}\,2$$

まえにも申しました通り，われわれの日常の言語感覚からすれば，(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ)のうちで，その正しさを最も理解しやすいのは(Ⅰ)でありましょう．しかし，矛盾概念の本質的な役割を最も端的に表わしているのは，それは(Ⅲ)であるといえます．すなわち，

〈矛盾〉とは，それから任意の命題が導かれるものである．

これが〈起り得べからざること〉ということの論理的な内容であったのでした．われわれは，これによって，矛盾命題人に関する推論規則として，つぎのものを採用することにしましょう：

$$\textbf{人に関する推論規則：}\qquad \dfrac{\text{人}}{A}$$

最小論理　§1—§6で述べた推論規則だけを用い，人に関する推論規則を用いない範囲で考える論理は，ヨハンソン (Johansson) によって〈最小論理〉と名づけられています．論理とよび得るもののなかでの最小範囲のものという意味でありましょう．この§でこれまでに述べてきましたことを要約すれば：

> 最小論理は，本質的な意味においては，矛盾概念を含んではおりません．否定や矛盾の概念を含んでいるかにみえるのは，それは全く外見上のことだけなのであります．

問　$\neg A\to(A\to\text{人})$　と　$(A\to\text{人})\to\neg A$　の証明図．

§8.〈排中律〉について

排中律：　　$A\vee\neg A$

1.　排中律 (tertium non datur) もまた，われわれの日常言語感覚からすれば，任意の命題Aに対してつねに成立するものと考えられます．そして，それは，本質的な意味での**間接証明**［すなわち**背理法**］の基礎を与えているものです．

背理法［または**帰謬法**（きびゅうほう）］というのは，A という命題を証明するために，A の否定 $\neg A$ を仮定して矛盾を導いてみせる，という証明法です．すなわち，

$$\neg A \to \text{人}$$

を証明すれば，それで A の証明が得られたことになる，という考え方です．$\neg A \to \text{人}$ というのは A の 2 重否定

$$\neg\neg A$$

のことにほかなりませんから（§7の問），背理法の原理は**2重否定の除去の法則**

$$\neg\neg A \to A$$

によって表わされているものであります．

2重否定の除去法則は，排中律を用いて，つぎのように証明されます：

$$\cfrac{\cfrac{\overset{(\text{排中律})}{A \vee \neg A} \qquad \overset{1}{A} \qquad \cfrac{\cfrac{\overset{1}{\neg A} \quad \overset{2}{\neg\neg A}}{\text{人}}}{A}\ \text{人に関する推論}}{A}\ \vee\text{-除去 }1}{\neg\neg A \to A}\ 2$$

2.　§1—§7に述べました推論規則をいかに適用しても，われわれは排中律を証明することはできません．［そのことの証明については，付録Ⅱの§2を見て下さい．］そこで，われわれは，〈排中律〉を**公理**と考えることにいたします．排中律を公理と考える，ということの意味は，演繹の仮定として

$$A \vee \neg A$$

という形の命題を，どんな命題 A について何回用いようと，それを仮定として数えない，ということであります．

3.　〈排中律〉の代わりに〈2重否定の除去法則〉

$$\neg\neg A \to A$$

を公理としても［あるいは，同じことではありますが，

$$\frac{\neg\neg A}{A}$$

という形の推論をつねに許すことにしても]，その効果に変わりはありません．何となれば，排中律の2重否定

$$\neg\neg(A\vee\neg A)$$

は，つぎに示すように，排中律を用いることなく証明することができるからです：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{A}}{A\vee\neg A}\qquad \overset{2}{\neg(A\vee\neg A)}}{\text{人}}}{\neg A}\,1}{A\vee\neg A}\qquad \overset{2}{\neg(A\vee\neg A)}}{\text{人}}}{\neg\neg(A\vee\neg A)}\,2$$

2重否定の除去を公理として認めれば，このことから排中律が証明されます．また，この逆に，排中律を用いれば2重否定の除去は証明されます．そのことは，すでに**1**で示した通りです．

4.　ついでのことですから，2重否定の除去を公理と考えれば，人に関する公理

$$\text{人}\to A$$

が証明されるという事実に注意しておきましょう．

まず，Aが否定命題［$\neg B$という形の命題］であるときには，人に関する公理は§1—§6における推論規則だけで［すなわち，最小論理の範囲で］証明することができます．何となれば，

$$\text{人}\to(B\to\text{人})$$

は最小論理の範囲で証明可能でありますし（§2の例3），$B\to$人と$\neg B$とは，これまた最小論理の範囲で同一の命題と考えることができますから（§7の問），

$$\text{人}\to\neg B$$

は最小論理で証明可能となります．くわしくは：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{B}\qquad\dfrac{\overset{2}{\text{人}}\quad \text{人}\to(B\to \text{人})}{B\to \text{人}}}{\text{人}}}{\neg B}\,1}{\text{人}\to\neg B}\,2$$

とすればよろしい．そして，この B として $\neg A$ を用いれば，

$$\text{人}\to\neg\neg A$$

が最小論理の範囲で証明可能となり，ここで2重否定の除去を用いれば

$$\text{人}\to A$$

が証明されます：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\text{人}}\qquad \text{人}\to\neg\neg A}{\neg\neg A}}{A}\,\text{2重否定の除去}}{\text{人}\to A}\,1$$

このような次第で，〈2重否定の除去の法則〉というものは，〈排中律〉とともに，§7で述べましたところの〈人に関する公理〉［または，〈人の定義〉といった方がよいかも知れませんが］をも含んでいるのであります．要するに．2重否定の除去というものは，排中律と人の公理の双方を合わせたものと同等ということになります．

以上，§1の〈→に関する推論規則〉から§8の〈排中律〉までで，われわれが**純粋に論理的な推論**とよぶところのものに必要なものは，すべて述べつくされています．もちろん，ここでは述べなかったような〈純粋に論理的な推論〉もあるではありましょうが，それは，上述の推論規則や公理の組み合わせとして必ず表わすことができるのであります[1]．

---

1) このような断定をくだすことには，ある程度の問題はあります．それは〈純粋に論理的な〉という形容詞によって意味されているところが何であるか，ということに関係しています．その点について，もし割り切って考えるならば，これをもって〈純粋に論理的な推論〉というものの定義と考えねばならぬでしょう．しかし，そのような名称の問題にこだわるよりは，その名称のもとに包括されている内容を知ることが，より大切であると思います．

直観主義の論理　〈直観主義〉というのは，数学における方法論上の問題として，ブラウワー（Brouwer）によって提唱されたある種の主張につけられた名称であります．彼は数学において排中律を無制限に用いるのは正当でない，と主張いたします．それは，単にそれだけの主張というのではなく，ある独自の哲学に由来するのでありますが，その形式上の問題にのみ着目して，直観主義の数学に用いられる純粋に論理的な推論を整理した結果，それは§1—§7 に述べた範囲の論理である，ということになったのであります．そのために，その範囲の論理のことを〈直観主義論理〉とよぶならわしになっています．直観主義論理，あるいは直観主義の数学においては，背理法による証明というものは，一般には承認されないものなのであります．

直観主義論理［または，その他の種々の論理］に対して，排中律までを含めた論理の全体系をよぶとき，しばしば**古典論理**という名称が用いられています．

§1—§6　**最小論理**	**直観主義論理**	**古典論理**
§7（人に関する公理）	（§1—§7）	（§1—§8）
§8（排中律）		

以下，本書においては，主として古典論理をとり扱います．ですから，とくに断らない限り，本書の記述はすべて古典論理に関するものとご承知願いたいのです．

第3章　真　理　値

命題の真偽を表わすために，われわれは**真理値**というものを用いることがあります．真理値というのは，いわば，命題につけられた〈目じるし〉でありまして，

正しい命題　には　$\vee$

間違った命題　には　$\curlywedge$

という記号を対応させ，この2つの記号 $\vee$ および $\curlywedge$ に，それぞれ **真**(true) および **偽** (false) という名称を与えます．そして，命題 A に $\vee$ が対応しているとき，$\vee$ を A の〈真理値〉，A に $\curlywedge$ が対応しているときは，$\curlywedge$ を A の〈真理値〉というのです．

真理値を表わす記号の1つ $\curlywedge$ は，まえに〈矛盾〉という命題を表わすために用いましたのと同じであります．この2つは概念的には異なったものではありますが，結局は，矛盾命題の真理値が偽となるということになりますので，さきまわりをして同じ記号を用いておきました．矛盾というのが，偽な命題の代表的なものである，とでも考えておかれれば，それでよいでしょう．

〈真〉および〈偽〉というものの一般的性格を論じようということになれば，どうしてもある程度の哲学的な議論にならざるを得ません．ここでは，それを割り切って，真偽というものを単に命題につけられた目じるしとしてのみ考えることにします．すなわち，純粋に論理的な面からだけの考察をするのでありまして，〈真とは何か〉また〈偽とは何か〉という問題をとり扱うのではありません．したがって，以下に述べます性質だけが真偽のすべてを規定しているわけではないのです．真偽というものの実相は，むしろ，純粋論理以前に存するものであり，記号論理学において真偽を論じます場合には，真偽の概念がどのように演繹法と関連して現われてくるかということに

だけ着目するのであります．

§0.　真理値の基本性質

われわれは，真理値に関しての基本的な性質として，つぎに述べる（Ⅰ），（Ⅱ），（Ⅲ）という３項目を基礎におこうと思います．この３個の条件によって，通常〈真理値〉とよばれているものの性質は完全に規定されてしまうからです．

（Ⅰ）　第２章で述べた演繹法で証明される命題の真理値は V である．

これは，演繹法によって証明される命題はすべて正しい，ということであります．

（Ⅱ）　２つの命題

$$A \quad \text{および} \quad A \to B$$

の真理値がともに V であるならば，

$$B$$

という命題の真理値もVである．

これは，A と $A \to B$ がともに正しければ B も正しいということでありまして，A から B が導かれる［すなわち，$A \to B$］ということの意味である，とも考えることもできます．

（Ⅲ）　A の否定 $\neg A$ の真理値が V のとき，および，そのときに限って，A の真理値は 人 である．

これは，いわば，真理値が人であるということの定義であります．（Ⅰ）と（Ⅱ）のいずれも，どのような場合に真理値が V となるか，ということの説明でありまして，人 という真理値に関するのは（Ⅲ）のみであります．すなわち，A の真理値が 人［すなわち，A が間違い］というのは，$\neg A$ の真理値が V［すなわち，$\neg A$（A でない）ということが正しい］ということにほかならない，というのです．

ここで，さっそく，まえに述べた宿題をかたづけておきましょう．といい

ますのは，

矛盾命題 人 の真理値は 人 である

ということのことです．そして，それは，（Ⅰ）と（Ⅲ）によれば，

$$\neg \text{人}$$

という命題を証明することによって明らかとなります．何となれば，¬人が証明されたならば，（Ⅰ）によって，¬人 の真理値は Y となり，（Ⅲ）によれば，人 の真理値は 人 となるからです．

¬人の証明：

$$\frac{\overset{1}{\text{人}}}{\neg \text{人}}\ \neg\text{-導入}\ 1.$$

以上において，あらゆる命題にYまたは人という真理値が対応している，というようなことは一言もいってはおりません．まえにも述べました通り，たとえば変数を含む命題など，真偽の定まっていない命題が現実に存在する以上，真理値の定義されていない命題もあると考えておくほうが，むしろ自然な考え方であります．上に述べましたことは，（Ⅰ），（Ⅱ），（Ⅲ）という 3 つの方法によってある特殊な命題に対しては真理値を定義することができるという，その方法だけなのであります．

変数を含む命題には，絶対に真理値を定義しないという考え方もありますが，ここでは，たとえば（Ⅰ）におけるように，証明される命題であるならば，それが変数を含もうと含むまいと，真な命題であると考える流儀によりました．しかし，このような流儀の差は，記号論理学においては，ほとんど気にする程の問題にはならないのであります．

§ 1.　¬ について

1.　A の真理値が Y ならば，$\neg A$ の真理値は 人 です．

証明　まず

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\overset{2}{A}\quad \overset{1}{\neg A}}{\text{人}}}{\neg\neg A}\ 1}{A \to \neg\neg A}\ 2$$

として，

$$A \to \neg\neg A$$

が証明可能であることに注意します．したがって，基本性質の（Ｉ）によって，この命題の真理値は $\curlyvee$ です．これと，A の真理値が $\curlyvee$ であることを用いれば，基本性質の（Ⅱ）によって，$\neg\neg A$ の真理値が $\curlyvee$ であることがわかります．$\neg\neg A$ とは $\neg A$ の否定でありますから，基本性質の（Ⅲ）によれば，このことは $\neg A$ の真理値が $\curlywedge$ であるということを意味しています（証明おわり）．

2.　A の真理値が $\curlywedge$ ならば，$\neg A$ の真理値は $\curlyvee$ です．

このことは，基本性質の（Ⅲ）より直接に知ることができます．

3.　以上の 1，2 に述べましたことを，つぎのような表で表わします．

A	$\neg A$
$\curlyvee$	$\curlywedge$
$\curlywedge$	$\curlyvee$

この表のことを **$\neg$ の真理表**といいます．∎

§ 2.　→について

→に関しては，まず，つぎの 3 つの命題の真理値が $\curlyvee$ であることに注意します：

（1）　$$B\to(A\to B)$$

（2）　$$\neg A\to(A\to B)$$

（3）　$$A\to[\neg B\to\neg(A\to B)]$$

この（1）については，第2章の§2 の例3［または，そのあとの注意］に述べました通り証明可能でありますし，（2）と（3）も

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{A}\qquad\overset{2}{\neg A}}{\curlywedge}}{B}\ \text{⋏に関する推論}}{A\to B}\ 1}{\neg A\to(A\to B)}\ 2
\qquad\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{3}{A}\qquad\overset{1}{A\to B}}{B}\qquad\overset{2}{\neg B}}{\curlywedge}}{\neg(A\to B)}\ 1}{\neg B\to\neg(A\to B)}\ 2}{A\to[\neg B\to\neg(A\to B)]}\ 3$$

として証明することができます．すなわち，（1），（2），（3）のいずれの真

理値も Y であります［基本性質（Ⅰ）］.

→の真理表：

A	B	$A\to B$
Y	Y	Y
Y	人	人
人	Y	Y
人	人	Y

この真理表の意味するところは，つぎの通りであります：

1. A の真理値も B の真理値もともに Y であるときは，
   $A\to B$ の真理値は Y.
2. A の真理値が Y で B の真理値が 人 であるときは，
   $A\to B$ の真理値は 人.
3. A の真理値が 人 で B の真理値が Y であるときは，
   $A\to B$ の真理値は Y.
4. A の真理値も B の真理値もともに 人 であるときは，
   $A\to B$ の真理値は Y.

証明　まえに挙げました（1）という命題の真理値が Y であることを利用すれば，B の真理値が Y である場合には $A\to B$ の真理値が Y となることがわかります．すなわち，B の真理値が Y でありさえすれば，A の真理値が Y であっても 人 であっても［または，A の真理値が定義されていなくても］$A\to B$ の真理値は Y であります．これで 1 と 3 が証明されたことになります．

つぎに，（2）を用いれば，A の真理値が 人 である場合には，$\neg A$ の真理値が Y となりますから，B の真理値が Y であっても 人 であっても［または，定義されていなくても］，$A\to B$ の真理値が Y であることがわかります．これで 3 と 4 が証明されたことになります．［結局，3 は 2 重に証明されたことになっていますから，一方はもちろん不要です.］

残るところは 2 の証明です．それは，A の真理値が Y で B の真理値が 人

の場合でありまして，（3）という命題の真理値が ⋎ であることを利用します．まず，

$$A \to [\neg B \to \neg(A \to B)]$$

が ⋎ で A が ⋎ ですから

$$\neg B \to \neg(A \to B)$$

が ⋎ となります．つぎに，B が ⋏ ということから $\neg B$ が ⋎ となり

$$\neg(A \to B)$$

が ⋎，すなわち，$A \to B$ が ⋏ となります．

以上で，証明はおわりました．

A と B の真理値が定義されている場合には，その真理値だけに着目すれば，

A	B	
⋎	⋎	
⋎	⋏	
⋏	⋎	
⋏	⋏	

という4通りによって，あらゆる場合がつくされているわけです．ですから，上述の〈→ の真理表〉によれば，A と B の真理値が与えられれば，かならず $A \to B$ の真理値を決定することができる，ということになります．

§ 3.　∧ について

∧ の真理表：

A	B	$A \wedge B$
⋎	⋎	⋎
⋎	⋏	⋏
⋏	⋎	⋏
⋏	⋏	⋏

この表の説明のためには，

$$A \to [B \to (A \wedge B)]$$

$$\neg A \to \neg(A \wedge B)$$

$$\neg B\to\neg(A\wedge B)$$

という 3 つの命題を証明すれば十分です．

第 1 の命題は第 2 章の §2 の 問 にあります．［証明のわからない方は，解答を見て下さい．］ 第 2 の命題を示すには，まず

$$\dfrac{\dfrac{\overset{1}{A\wedge B}}{A}}{(A\wedge B)\to A}\,1$$

として

$$(A\wedge B)\to A$$

を導き，その対偶を作ればよいでしょう［第 2 章，§4，例］．あるいはまた，直接に

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{A\wedge B}}{A}\qquad \overset{2}{\neg A}}{\text{⅄}}}{\neg(A\wedge B)}\,1}{\neg A\to\neg(A\wedge B)}\,2$$

とするほうが簡単かも知れません．第 3 の命題についても，これと全く同様です．

§ 4.　∨について

∨の真理表：

A	B	$A\vee B$
Y	Y	Y
Y	⅄	Y
⅄	Y	Y
⅄	⅄	⅄

この表の基礎を与えるのは

$$A\to(A\vee B)\qquad B\to(A\vee B)$$

$$\neg A\to[\neg B\to\neg(A\vee B)]$$

という3個の命題であります.」

問　上の3つの命題を証明せよ.

§ 5.　命題の同値

$$(A \to B) \wedge (B \to A)$$

という命題をわれわれは

$$A \rightleftarrows B$$

という記号で表わし,〈A と B は**同値**である〉と読みます. この命題の**真理表**を作ってみますと,

A	B	$A \to B$	$B \to A$	$(A \to B) \wedge (B \to A)$
$\curlyvee$	$\curlyvee$	$\curlyvee$	$\curlyvee$	$\curlyvee$
$\curlyvee$	$\curlywedge$	$\curlywedge$	$\curlyvee$	$\curlywedge$
$\curlywedge$	$\curlyvee$	$\curlyvee$	$\curlywedge$	$\curlywedge$
$\curlywedge$	$\curlywedge$	$\curlyvee$	$\curlyvee$	$\curlyvee$

すなわち,

A	B	$A \rightleftarrows B$
$\curlyvee$	$\curlyvee$	$\curlyvee$
$\curlyvee$	$\curlywedge$	$\curlywedge$
$\curlywedge$	$\curlyvee$	$\curlywedge$
$\curlywedge$	$\curlywedge$	$\curlyvee$

となります. この表によれば, $A \rightleftarrows B$ が真($\curlyvee$)となるのは, A と B がともに真($\curlyvee$)となるか, ともに偽($\curlywedge$)となるとき, いいかえれば, A と B の真理値が一致するときであります. もちろん, そのようにいえるのは, A と B の真理値が定義されているときに限るのではありますが.

§ 6.　一般的な結論と注意

1.　以上によって, 4つの論理記号

$$\neg, \quad \to, \quad \wedge, \quad \vee$$

に関する真理表が完成しました．同値の記号 ⇄ に関する真理表も作りましたけれど，⇄ というのは → と ∧ の組み合わせとして表わされるわけですから，いわば〈おまけ〉であります．

ここで作りました個々の真理表の性質に関係のない一般的な結論，すなわち，真理表なるものを作り得たということだけからわかる結論は，つぎのようなものです：

すでに真理値の定まっている幾つかの命題から，

$$\neg,\quad \to,\quad \vee,\quad \wedge$$

という4つの論理記号――**命題結合記号**――を用いて作られる複合的な命題には必らず真理値が定義され，しかも，その真理値は最初に与えられた命題の真理値のみによって定まり，真理値以外の命題の内容といったようなものには関係しません．のみならず，最初に与えられた命題の真理値をすべてわれわれが知っていたならば，それから作られる複合命題の真理値を実際に求めることもできるのです．

たとえば，それは，§5において，$A \rightleftarrows B$ すなわち

$$(A \to B) \wedge (B \to A)$$

の真理表を作ったときのようにすればよいのであります．

2.〈真理値〉と〈演繹〉との接触点は §0 に述べました基本性質の（Ⅰ）のみであります．しかも，上記の真理表を得るに要しました演繹はすべて直観主義論理に属するものばかりで，排中律は一度も用いませんでした．のみならず，〈⅄に関する推論〉を用いたのもただの1度，§2における（2）という命題の証明に用いただけであります．してみれば，矛盾命題 ⅄ の性質を是非とも必要とするのは

A	B	$A \to B$
Y	Y	
Y	⅄	
⅄	Y	
⅄	⅄	Y

を導く場合だけでありまして，他はすべて最小論理の範囲で十分であるのであります．

3.　真理値というものとの関連において ∀ や ∃ の性質を調べようとすると，これまでとは全く異なった様相が現われます．その最も大きな理由といえば，

$$\neg, \quad \to, \quad \vee, \quad \wedge$$

という命題結合記号がすべて，与えられた1つまたは2つの命題から新しい1つの命題を作り出す演算を表わしているのに反し，

$$\forall x \quad \text{および} \quad \exists x$$

という演算が**命題関数** $F(x)$ に作用して新しい命題

$$\forall x F(x) \quad \text{および} \quad \exists x F(x)$$

を作るものと考えられる，というところにあるのです．

命題関数 $F(x)$ というものを真理値との関連において調べる場合，$F(x)$ に真（Y）あるいは偽（人）というような1つの値を対応させるのは一般論としては適当でありません．最も自然な考え方としては，$F(x)$ に対応しているのは，真理値を関数値としてもつ x の関数である，とすべきでありましょう．さて，そのような関数を考えるとすれば，是非とも，その独立変数 x の変域――それを**対象領域**とよびますが――を明示しなければならなくなります．

対象領域が有限個の対象

$$e_1, \ e_2, \ \cdots, \ e_n$$

からなっているときは，話は簡単です．というのは，命題関数 $F(x)$ は

$$F(e_1), \ F(e_2), \ \cdots, \ F(e_n)$$

という有限個の命題で完全に代表され，

$$\forall x F(x) \quad \text{は} \quad F(e_1) \wedge F(e_2) \wedge \cdots \wedge F(e_n)$$

$$\exists x F(x) \quad \text{は} \quad F(e_1) \vee F(e_2) \vee \cdots \vee F(e_n)$$

というように，n 個の命題に1つずつの命題を対応させる演算と考えることができるからです．しかし，対象領域が無限集合である場合には，もはや，

このような有限的な方法では処理しきれません．しいて真理表というようなものを作るとすれば，それは無限に長い表となってしまうでしょう．

さらに〈論理〉というものが，個々の対象領域というものにとらわれない一般的記述を要求するものでありますならば，すべての対象領域というものを一挙に考察の対象とせざるを得なくなり，そのためには必然的に**超越的な論法**というものが必要となってきます．この辺に，真理値による記号論理の研究というものの 1 つの限界があるのであります．

とはいえ，このような方法が全く無力だというのではありません．この考え方は，こんにち**モデルの理論**とよばれているものの発端をなすものではありますが，記号論理の初歩だけを解説することを目的とする本書では，これ以上に深入りをする必要はありますまい．

第4章　トートロジー

§1.　トートロジー

いま，

$$A \vee \neg A \qquad \text{[排中律]}$$

とか

$$((A \to B) \to A) \to A \qquad \text{[パース (Peirce) の法則]}$$

という命題を考えてみますと，これらはいずれも，A あるいは A と B の真理値が何であっても，つねに Y という真理値をもつことがわかります．実際，その真理表を作ってみれば，つぎのようになります：

A	$\neg A$	$A \vee \neg A$
Y	人	Y
人	Y	Y

A	B	$A \to B$	$(A \to B) \to A$	$((A \to B) \to A) \to A$
Y	Y	Y	Y	Y
Y	人	人	Y	Y
人	Y	Y	人	Y
人	人	Y	人	Y

この $A \vee \neg A$ とか $((A \to B) \to A) \to A$ のように，そこに現われる命題の真理値が何であっても，その真理値がつねに Y となるものを，われわれは**つねに真な命題結合** (immer richtige Aussagenverbindung) または**トートロジー** (tautology，**同語反復**) とよびます．

問　つぎに挙げたものがすべてトートロジーであることを示せ：

1. $A \to A$ ［同一律］
2. $\neg(A \wedge \neg A)$ ［矛盾律］
3. $(\neg\neg A) \rightleftarrows A$ ［2重否定の法則］
4. $\neg(A \vee B) \rightleftarrows (\neg A \wedge \neg B)$

   $\neg(A \wedge B) \rightleftarrows (\neg A \vee \neg B)$

   ［ド・モルガン (De Morgan) の法則］
5. $(A \to B) \rightleftarrows (\neg A \vee B)$
6. $(A \rightleftarrows B) \rightleftarrows [(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)]$
7. $((A \to B) \to B) \rightleftarrows (A \vee B)$

§2. 論 理 式

われわれは，

$$A \vee \neg A$$

という命題のことを排中律とよびました．しかしそれは，じつは1つの命題ではないのです．Aとしていろいろな命題を考えてみれば，いろいろな排中律ができるのです．要するに，排中律というのは，1つの命題につけられた名前ではなくて，ある形をした一群の命題につけられた名称であり，または〈命題の形〉そのものにつけられた名称とも考えられます．

論理学というものが，個々の命題とか個々の演繹というものよりは，むしろ演繹の一般形式をとり扱うものであるという観点から，これまでも，主として〈命題の形〉とか〈推論の形〉だけをとり扱ってきました．そのために，われわれは

$$A,\ B,\ C,\ \cdots$$

というような文字で任意の命題を，

$$F(\quad),\ G(\quad,\quad),\ \cdots$$

というような記号で任意の述語を表わしてきたのです．任意の命題を代表する記号を**命題変数**，任意の述語を代表する記号を**述語変数**とよびます．

命題変数・述語変数という言葉に対して，これまでに用いてきた〈自由変数〉およ

び〈束縛変数〉のことを**対象変数**とよびます．それは，任意の対象を代表しているという意味であります．ですから，くわしくは**自由対象変数・束縛対象変数**とよぶのがよいわけですが，いまのところ〈自由〉と〈束縛〉の区別のあるのは対象変数だけでありますので，いままで通り，単に自由変数・束縛変数とよぶことにしておきます．

とにかく，このように，命題の代わりに命題変数を，述語の代わりに述語変数を用いて表わされた命題の形式のことを，われわれは**論理式**とよぶことにします．命題変数が任意の命題を表わし，述語変数が任意の述語を表わしていると考えれば，1つの論理式は，ある一群の命題を表わしています．また，命題変数や述語変数のおのおのが，それぞれ1つずつの具体的な命題や述語を代表しているとするならば，1つの論理式は1つの命題を表わしていることにもなります．われわれが第2章以後で命題とよんできたものは，じつは，すべてこの論理式であったのです．

〈論理式〉という概念は，ちょうど〈多項式〉という概念と同じようなものです．変数 x が数を表わしていると考えて，

$$x^2+2x-3$$

を数と考えることもできます．しかしまた，場合によっては，この多項式による表現そのものを考えることもあります．同様に，論理式を命題と考える場合もあれば，論理式という表現そのものと考えることもあるのです．

ついでながら，述語変数や論理記号 ∀ および ∃ を含まない論理式を**命題論理の論理式**，一般のものを**述語論理の論理式**といって，これを区別することがある，ということにも注意しておきましょう．命題論理の論理式に含まれ得る論理記号は

$$\to,\quad \wedge,\quad \vee,\quad \neg$$

の4種類だけであります．[⇄ という記号を含んでいても差しつかえありませんが，⇄ は → と ∧ の組み合わせとして書けるので，原理的には不要です．] それは，ちょうど，四則演算のうち ＋，－，× の3つだけに着目する場合には多項式は適当なものであるが，÷をもとり扱うには〈有理式〉を必要とするのに似ています．さらに $\sqrt{\ }$ という演算をも考慮に入れるときには，こんどは〈無理式〉を考える，というように，〈論理式〉という概念も，そこでとり扱う論理的演算の種類に応じて，当然に変化をもたすべきものな

のであります．

§ 3.　論理式の真理値

第3章においては，〈真理値〉というものを命題につけられた〈目じるし〉であるとして説明しました．それは，

正しい命題に　Y
間違った命題に　人

と対応させられた記号 Y および 人 のことであります．

このような考え方では，論理式というものには，それを論理式そのものと考える限り，一般に真理値は対応していません．命題変数は真な命題も偽な命題をも一括して代表してはいるものの，それ自身は命題ではありませんので，命題変数には真理値が定義されていないからです．

もっとも，

$$A \to A$$

というような論理式には Y という真理値が対応しています．それは，この論理式が証明可能であるからで，このようなのは，もちろん例外的なものであります．

このような次第ですので，論理式の真理値というものを考えるには，もう1度はじめから出なおしてみる必要があります．

1.　ここでとり扱う論理式はすべて〈命題論理の論理式〉であるとしておきます．まえにも述べました通り，真理値を問題にする場合には，命題結合記号とよばれる

$$\to,\quad \wedge,\quad \vee,\quad \neg$$

という4つの論理記号だけを考えるのが適当であるからです．

命題論理の論理式というものを一応はっきりさせておきましょう．

まず，そこで用いられる命題記号は，つぎの2種類だけであるとします：

命題定数　人
命題変数　A, B, C, ・・・

そして，この2種類の命題記号に，

$$\to,\quad \wedge,\quad \vee,\quad \neg$$

という論理演算を有限回ほどこして得られるところの命題の表現を〈命題論理の論理式〉というのです．

2.　命題定数 人 の真理値は 人 であるとします．つぎに命題変数のおのおのに，Y あるいは 人 を，それぞれ1つずつ任意に対応させ，それを命題変数の真理値とします．すると，第3章の §1—§4 に述べました

$$\neg,\quad \to,\quad \wedge,\quad \vee$$

に関する真理表にしたがって計算することにより，すべての論理式（＝命題論理の論理式）の真理値が定まります．これを，もっと精密に表現いたしますならば，命題論理のある論理式が与えられたとき，その論理式に現われるすべての命題変数の真理値を任意に定めさえすれば，それでその論理式の真理値は定まるのであります．

このことの内容的な意味は，とくに説明を要するとも思いませんが，要するに，与えられた論理式に含まれる命題変数のすべてにおのおの任意の命題を代入して得られる命題の真偽は，命題変数に代入すべき命題の真偽だけによって定まる，ということであります．

命題変数に真理値を与える方法は何通りもあります．与えられた論理式に含まれる命題変数の個数を n とすれば，命題変数の真理値の定め方は 2^n 通りあります．そして，その 2^n 通りのすべての場合を通じて与えられた論理式の真理値がつねに Y となれば，その論理式のことを〈トートロジー〉とよぶのであります．

§4.　論理式の真理値と真理値の基本性質

まえにも述べたように，この §3 で定義しました〈論理式の真理値〉というものは，第3章でとり扱いました〈命題の真理値〉とは根本的に異質のものであります．第3章においては，われわれは，命題の真理値というものがはじめから定まっている，という考え方から出発しました．そして，その真理値がどのような性質をもつかということを研究したのでした．そこでは，真理値というものはわれわれに与えられたものであって，いわば，われわれ

は受身の立場でその性質を調べたのであるといってよいでしょう．それに反して，論理式の真理値というものは，はじめからきまっているものではありません．それは，おのおのの命題変数の真理値というものをわれわれが**かってに**与えることによって，はじめて定まるものであります．

たとえて申しますならば，第3章の §0 に挙げました3つの〈真理値の基本性質〉

（Ⅰ）　演繹法で証明される命題の真理値は Y.

（Ⅱ）　2つの命題

$$A \quad \text{および} \quad A \to B$$

の真理値がともに Y ならば，B という命題の真理値も Y.

（Ⅲ）　命題 A の真理値が $\mathsf{人}$ となるのは，$\neg A$ の真理値が Y となるときである．

を考えてみましょう．〈命題の真理値〉を考えておりました第3章においては，これら3つの基本性質は，いわば自明の理でありました．

〈正しい命題〉　の真理値は　Y
〈間違った命題〉の真理値は　人

という真理値の定義からの当然の帰結と考えたのであります．

もちろん，われわれは，そこに何等の論理的な根拠をも与えませんでした．命題が正しいとか，あるいは間違っているとかいう，われわれの悟性に直接にうったえなければならぬ概念と，演繹というような，まったくの形式的な操作との関係を論じることは，純粋に論理的な立場からは絶対に不可能なことであって，最後はやはり，われわれの直観的な論理的感覚にたよるほかはないのでありまして，われわれは，この3つの基本的性質をもって，その関係を論じる出発点としたのであります．もしわれわれが〈命題の真偽〉を第一義的なものと考えますならば，この3つの基本性質は，演繹法の正当性を表明する1つの主張であり，また〈演繹〉をもって第一義とする場合には，それは，命題の真偽に関する公理を与えたものであるとも考えることができるのです．

ところが〈命題論理の論理式に対する真理値〉を考えますと，状況は一変いたします．そのような場合には，当然のことながら，3つの基本性質における〈命題〉という言葉を〈論理式(＝命題論理の論理式)〉というように読

みかえなければなりません．すなわち，真理値の基本性質として，

（Ⅰ）　演繹法で証明される論理式の真理値はＹ．

（Ⅱ）　２つの論理式

$$\mathcal{A} \quad \text{および} \quad \mathcal{A} \to \mathcal{B}$$

の真理値がともにＹならば，$\mathcal{B}$ という論理式の真理値もＹ．

（Ⅲ）　論理式 $\mathcal{A}$ の真理値が人となるのは，$\neg\mathcal{A}$ の真理値がＹとなるときである．

の３つを考えるのです[1]．そうすれば，こんどのこの３つの基本性質は自明なものでもなく，また，自明なものと考える以外に説明のしようがないというような性質のものでもありません．論理式の真理値というものは，われわれが，われわれの責任においてハッキリと定義したものである以上，その基本性質としてここにあげました（Ⅰ），（Ⅱ），（Ⅲ）の３つが正しいかどうかという設問は１つのハッキリとした問題でありますし，しかも，じつは，その正しさをハッキリと説明することができるのであります．

（Ⅱ）の説明　→の真理表

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \to \mathcal{B}$
Ｙ	Ｙ	Ｙ
Ｙ	人	人
人	Ｙ	Ｙ
人	人	Ｙ

を見てみますと，$\mathcal{A}$ と $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ の真理値がともにＹとなるのは $\mathcal{B}$ の真理値がＹとなるときのみであります．そして，論理式 $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ の真理値というものは，$\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ の真理値がすでにわかっております場合，この真理表によ

1）　命題変数 $A, B, C, \cdots$ と命題定数人とから $\neg$，$\to$，$\wedge$，$\vee$ という論理記号を用いて作られた論理式というものを表わすのに再び命題変数 $A, B, C, \cdots$ を用いますと，いろいろな点において混乱を起こしやすいので，論理式を表わすときには，

$$\mathcal{A},\ \mathcal{B},\ \mathcal{C},\ \cdots$$

のようなスクリプト体の文字を用いることにします．

って定義されるのでありますから，一般的な結論として，$\mathcal{A}$ および $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ の真理値がともに Y であれば $\mathcal{B}$ の真理値もまた Y である，ということができます．これすなわち，（II）の主張にほかなりません．

（III）**の説明**　¬の真理表

$\mathcal{A}$	$\neg\mathcal{A}$
Y	人
人	Y

によれば，$\mathcal{A}$ の真理値が 人 となるのは $\neg\mathcal{A}$ の真理値が Y となるとき，および，そのときに限ります．これが(III)の主張するところであります．

（I）**の説明** も以上とまったく同様な趣旨のものでありますが，ただ（I）というのが演繹法と関係し，しかも相当に一般的な内容をもった主張でありますので，その説明がある程度長くなることはやむを得ません．ここでは，その説明は省略し，付録 I として述べておきました．読者がすすんでそれを読まれることを期待します．

§ 5.　演繹法の無矛盾性

ここで述べます〈演繹法の無矛盾性〉というのは，論理式の真理値に関する基本性質の第 1 にあげた

（I）　命題論理の論理式のうち演繹法で証明されるものの真理値はつねに Y である

から直接に得られる結論の 1 つであります．（I）の説明は付録 I にまわすことにしましたが，これから得られる結論の無矛盾性の説明だけは簡単にできますので，ここに述べておくことにします．

〈命題論理の論理式〉というのは，まえにも申しました通り，命題定数 人 と命題変数とから〈命題結合記号〉とよばれる 4 種の論理記号

$$\neg,\quad \to,\quad \wedge,\quad \vee$$

によって組み立てられた式のことであります．とくに，命題定数 人 自身も，

個々の命題変数もそれぞれ命題論理の論理式の特別なものと考えます.

命題定数 人 の真理値はいつでも 人 であるとしておきます. そして, 各命題変数の真理値を任意に与えますと命題論理の論理式すべての真理値が定まります. 論理式の真理値というのは, 命題変数への真理値の与え方によって一般には変化しますが, 各命題変数に1つずつの真理値を与える与え方を1つ固定して考える限りにおいては, 各論理式の真理値が Y であるか 人 であるかということは, 個々の［命題論理の］論理式のおのおのに対して, それぞれ, いずれか**一方のみ**に定まってしまいます. このことは, 真理表を用いて真理値を計算する限り当然のことでありまして, いまさらいうまでもないことなのでありますが, ただ, そのようにして命題論理の論理式のおのおのに1つずつの真理値を対応させた場合, そのような論理式のうちで演繹法によって証明されるものは Y という真理値をもつものに限る, というところに重要な論点があるのであります. したがって, とくに

矛盾命題を表わす命題定数 人 は 純粋な演繹法[1] のみによっては証明することはできません.

何となれば, 命題定数 人 の真理値は, 真理値の定義によれば, つねに 人 であって, Yという真理値はとり得ないからであります.

以上で〈無矛盾性〉の証明は終りました. たとえば, 無矛盾性というのは, 普通には, どんな論理式 $\mathcal{A}$ に対しても $\mathcal{A}$ と $\neg\mathcal{A}$ の両方がともに証明されることはあり得ない, というように表現されますが, このことも, 前記の無矛盾性からすぐにわかります. というのは, 〈¬ の除去〉という推論規則(第2章, §4)によると, $\mathcal{A}$ と $\neg\mathcal{A}$ をあわせれば 人 を導くことができるのですから, もしも $\mathcal{A}$ と $\neg\mathcal{A}$ の両方が証明できるようなことがあれば, 人

---

1) ここで〈純粋な演繹法〉とよんだのは, 第2章に述べた演繹の方法のことでありまして, これまで単に〈演繹法〉とよんできたものと同じであります. ただ, ここでは, 問題が問題であるだけに, 演繹という言葉を広く解釈される向きもあるかと思い, 第2章に述べました方法に限るということを強調するために〈純粋な……〉という形容詞をつけただけであります.

もまた証明できるということになってしまうからです．

ここで $\mathscr{A}$ と表わした論理式は，必ずしも〈命題論理の論理式〉であるを要しません．もし，$\mathscr{A}$ を命題論理の論理式とすれば，$\mathscr{A}$ には⋎または⋏という真理値が対応しており，$\mathscr{A}$ の真理値が⋎であるか⋏であるかにしたがって $\neg\mathscr{A}$ の真理値は⋏あるいは⋎となりますので，$\mathscr{A}$ と $\neg\mathscr{A}$ の真理値が同時に⋎となることはなく，そのことからも直接に，$\mathscr{A}$ と $\neg\mathscr{A}$ が同時に証明されることはない，ということがわかります．しかし，もし $\mathscr{A}$ が命題論理の論理式でなく，∀や∃を含んでいるような論理式である場合には，そのままでは $\mathscr{A}$ に真理値が対応しておりませんから，すぐにこのような直接的な論法を使うわけにはいきません．

§ 6.　無矛盾性の証明はなぜ必要か？

演繹法が無矛盾であること．なぜこんなことを証明する必要があったのでしょうか？　こんなことは，はじめから当りまえのことではなかったのでしょうか？　たとえば，われわれは第３章の § 0 において〈真理値の基本性質〉なるものを自明のこととして認めました．そして，それを自明のことと認める以上，演繹法の無矛盾性もほとんどそれと同程度に自明なことと認めざるを得ないのです．その理由はといえば，§ 5 に述べましたことを，ただ〈命題の真理値〉について述べなおすだけで十分なのであって，何も〈論理式の真理値〉などというものをわざわざ定義し，本来〈自明の理〉であった基本性質を証明する必要など全然なかったのではありますまいか？

〈正しい命題〉　の真理値は　⋎

〈間違った命題〉の真理値は　⋏

と定義することによって，各命題のおのおのにはそれぞれ**たかだか１つ**[1)]の真理値が対応します．そしてまた，第３章の §0 で示したように，真理値の基本性質を認める限り，矛盾命題⋏の真理値が⋏であることがわかり，さら

1)　ここで〈たかだか１つ〉と申しましたのは，たとえば

$a+b=c$　［a, b, c は実数を表わす自由変数］

のように自由変数を含む命題は，a, b, c に対象［ここでは，実数を表わす定数］を代入しないうちは，一般にはその真偽が定まらない，ということに起因するのであります．

に基本性質をもういちど用いることにより，矛盾命題 $\curlywedge$ が演繹法では証明し得ないということ，すなわち〈演繹法の無矛盾性〉が明らかになります．いったい，この議論のどこがいけないというのでしょうか？

わたくしの考える限り，この議論はどこも悪くありません．しかしまた，全然問題がないというわけでもありません．以下，簡単に，そのことについて述べようと思いますが，このようなことに興味をもたれぬ読者や，あるいは短気な読者は，それを抜かして，つぎの§に進まれるのがよいでしょう．というのは，そのことは，本書のその後の部分を理解するのに必要欠くべからざることではないからです．

さて，われわれが〈命題の真理値〉を用いて〈演繹法の無矛盾性〉を示した際に，その論拠となったものは何かというと，それはつぎの2点にしぼられます：

(A)　各命題には，それぞれ**たかだか1つ**の真理値しか対応していない．

(B)　命題の真理値については，その基本性質が成立している．

この(A)と(B)を認めさえすれば，われわれは，演繹法の無矛盾性を，上述のように容易に示すことができたのでした．そこで，以下この点について簡単ながら批判的な考察を行なってみることにしましょう．

まず，(A)の意味するところは何か．それは，どんな命題も，真であるとともに偽であることはあり得ない，ということであります．**矛盾律**とよばれ，論理学の基本原理の1つに数えられているこの事実は，普通には，まったく自明なことと考えられております．しかし，ひるがえって，この矛盾律を自明と認める根拠はいったい何であろうか，と反問してみるならば，われわれは，哲学上の最も困難な問題の1つに直面することになります．それは，その問いに答えるためには，まず第1に〈命題〉とは何かということを，つぎには，〈真〉とは何か〈偽〉とは何かということをハッキリと規定する必要が生じるからです．わたくしは，ここで，そのような哲学的論議を展開する気持を毛頭もってはおりませんし，また，その必要もありますまい．わたくしがここで指摘しておきたかったことはただ1つ，(A)というのがけっして十分に分析的に明白な根拠をもってなされている主張ではない，という事実であります．

つぎに(B)でありますが，(B)の要点は主として命題の真偽と演繹法との関係を述べている点にあります．(A)という主張を認めた上で〈演繹法の無矛盾性〉を示すに必要な〈命題の真理値の基本性質〉は

(Ⅰ)　演繹法で証明される命題はすべて真である

(Ⅲ)　$\neg A$ が真のとき，およびそのときに限って，A は偽である

の2つだけでありますが，この(Ⅰ)によって演繹法と真理値とに関係がつけられてい

るのです．

常識的な立場では通常，命題の真偽というものはわれわれとは独立に定まっているもの，と考えております．たとえば，数学上の多くの未解決の問題というのは，現在のわれわれにとってはその真偽はまったく知られていないわけではありますが，しかし本当は，真か偽のどちらかにきまっているに違いない．そして，われわれ数学者は，論理を駆使してその真偽を決定しようと日夜努力を続けている．と，まあこういうふうに考えておるのであります．これは要するに，命題の真偽というものは論理とか演繹とかいうものを考えだす以前からチャンときまっているもの——それは人間がきめたものではなく神様がきめたものである，といったような考え方であります．

神様の存在を信じていなくとも，命題の真偽が演繹法以前から既に定まっているということを信じている人は多いようです．もっとも，なかには，そういう超越的な考え方は数学をあやまった方向に導くものである，といって反対する向きもあります．たとえば，**直観主義**の数学においては，命題の真偽はあくまでも人間の責任において定むべきものであって，はじめからきまっているものではない，という考え方が基礎になっています．そして，この考え方が，第2章の最後に述べました〈直観主義の論理〉の背景をなすものであります．われわれが〈排中律〉を認めるには，やはり，命題の真偽が当初からきまっている，という考え方がもとにあるに違いなく，したがって，そのもとになる考え方を否定する直観主義の数学において排中律を認めないというのは，それは当然のことといわねばなりません．

命題の真偽がわれわれとは独立に定まっているのに反し，演繹法というのは，まったく人工的なものであります．命題の真偽は，いわば神の定めたものでありますが，演繹法は人間の作ったものであります．命題の真偽をすべて知りつくしている神にとって，演繹法など何の必要もありません．演繹法とは，ほんの少しの命題の真偽しか知らないわれわれ人間が，少しでもそれに関する知識の範囲を拡張しようとして考案した方法にほかならないのです．ですから，真理値の基本性質の(Ｉ)としてあげましたところの

演繹法で証明される命題はすべて真である

というのは，われわれの発明した演繹法に対するわれわれの期待であり，また願望を表現したものであります．基本性質(Ｉ)を認めることは，演繹法を信ずることにほかなりません．しかし，演繹法の発明が所期の目的にかなっているものかどうかということは，それこそ神ならぬわれわれ人間にとって知るよしもないことであります．

命題の真偽がわれわれとは独立に定まっていると考える立場に立てば，演繹法によって真であると結論された命題が，はたして本当に真であるかどうかということは，われわれにはわかりませんし，また，それを知る方法もありません．われわれは，命題の真理値に関する限り，基本性質(Ｉ)を信じるよりほか方法がないのです．

演繹法にとっての最悪の事態を想定しますと，基本性質の(Ⅰ)を信じようにも信じることができない，ということもあり得ます．それは，演繹法によって同一の命題Aが真でもあり，また偽でもある，と結論せざるを得ない場合であります．もし，このような事態に立ちいたったならば，われわれの演繹法の発明は，完全な失敗に終わった，と結論せざるを得ません．

演繹法によって命題 A を真と結論するというのは，A を証明することができた場合であります．また，演繹法によって命題 A を偽と判定するのは，基本性質の（Ⅲ）によれば，$\neg A$ を証明することができた場合であります．したがって，命題 A が真であるとともに偽であるとも結論せざるを得ない場合というのは，A と $\neg A$ の両方を証明し得たときにのみ考えられることでありますが，じつは，そのような事態は起り得ません．なぜかといえば，演繹法は〈無矛盾〉だからであります．

〈無矛盾性の証明〉というのは，われわれの作った演繹法に最低限の保証を与えることであります．それは，はじめから明らかなこと，というわけではけっしてありません．

無矛盾性証明の指針　命題の真理値に関する基本性質を認めることは，われわれの演繹法をそのまま信ずることであります．したがって，演繹法が矛盾を導かないことを示すのに命題の真理値の基本性質を用いたのでは何にもなりません．

演繹法では，個々の命題の内容を一切考慮しておりません．そこでは，命題の形式のみを問題にしています．ですから，命題の代わりに論理式を用いて無矛盾性を証明すれば，それで十分であります．

論理式の真理値というものは，たしかに，命題の真理値からヒントを得て考えられたものであります．しかし原理的には，そこに何の関係もありません．ですから，論理式の真理値を利用して無矛盾性の証明をすることができれば，それは一応意味のあるものと考えることができます．少なくとも，まえに述べました（A),(B）という2点を根拠として証明したことにはならないからであります．

§7.　命題論理の完全性

まえの§4において，論理式の真理値に関する基本性質の1つとして，演繹法によって証明される論理式は真理値が V のものに限る，ということを述べました．そして，演繹法の無矛盾性証明というものも，この事実を基礎にしたのでありました．ただ，ここでいう論理式とは真理値が定義されているものでなければなりませんから，命題論理の論理式に限られることはいうまでもありませんし，さらには，各命題変数に真理値を与える与え方も，任

意ではありますが，それを１つ固定して考えた場合の話であります．論理式の真理値というものは，各命題変数に真理値を与える与え方を固定してはじめて定まる概念だからであります．ところが，これに反して，ある論理式が演繹法によって証明できるかどうかということは，真理値の与え方というようなことにはまったく関係のないことなのです．ですから，この２つのことを考え合わせれば，上の基本性質からすぐに，つぎの結論を得ることができます：　演繹法によって証明される命題論理の論理式は，どんな真理値の与え方に対してもつねに Y という真理値をもつものである．どんな真理値の与え方に対してもつねに Y という真理値をとる論理式のことを，われわれは〈トートロジー〉と名づけたのでありますから，このことは

命題論理の論理式で演繹法によって証明されるものはすべてトートロジーである

と表現することができます．

ところが，じつは，この逆も成立いたします．すなわち：

トートロジーはすべて演繹法によって証明することができる．

要するに，命題論理の論理式に話を限った場合，それがトートロジーであるということと，それが演繹法によって証明できるということは，結果的にいって，まったく同じことになるのであります．

真理値を１つ固定して考えた場合，ある論理式の真理値が Y になったからといって，その論理式が演繹法によって証明できるとは限りません．その論理式の真理値が Y となったのは偶然のことで，他の方法で真理値を与えた場合には 人 となるかもしれないからであります．どんな方法で真理値を与えてもつねに Y となる論理式だけが証明できるのであります．

さて，上記の事実をより正確に述べておきましょう．

まず，演繹法で証明できる命題論理の論理式はトートロジーに限る，という場合の〈演繹法〉とは，第２章に述べました推論規則の全部を含んでいるのであります．証明される論理式が ∀ や ∃ を含まない命題論理の論理式であるからといって，その証明にも ∀ や ∃ を含む論理式を使ってはいけないなどということは，どこにもいってはおりません．したがって，その演繹の

途中で ∀ や ∃ に関する推論規則を用いている可能性はいくらでもあるのであります．このように〈演繹法〉という言葉を最も広い意味で用いておきますならば，もっとせまい範囲の演繹法だけで証明できる命題論理の論理式もトートロジーであることはいうまでもないことで，これが最も強い表現になっているのであります．

こんどは，その逆の，トートロジーはかならず演繹法で証明できる，というときの〈演繹法〉でありますが，これももちろん第2章に述べました全体系の意味でありました．たとえば，第2章の §8 に述べました〈排中律〉の使用が禁止されたりいたしますと，もはや，このことは一般に成り立たなくなってしまいます．その意味で，ここで言います〈演繹法〉はあくまでも**古典論理**の演繹法のことでありまして，〈直観主義の論理〉とか〈最小論理〉についていっているのではありません．

しかしまた，トートロジーを証明するためには，古典論理の全体系が必要だというわけでもないのです．トートロジーというのは命題論理の論理式の1種です．それは，∀ とか ∃ という論理記号を含んではおりません．そして，じつは，すべてのトートロジーは，∀ や ∃ に関する推論規則の使用を禁止されても，なおかつ証明することができるのです．

われわれは，∀ および ∃ に関する4つの推論規則

∀-導入，　∀-除去，　∃-導入，　∃-除去

を用いない範囲での演繹法の体系を**命題論理**とよびます．命題論理とは要するに

$$\to,\quad \wedge,\quad \vee,\quad \neg$$

という4つの論理記号をとり扱う範囲をいいます．それに対して，

$$\to,\quad \wedge,\quad \vee,\quad \neg,\quad \forall,\quad \exists$$

という全部の論理記号をとり扱う範囲を**述語論理**というのです．命題論理・述語論理のおのおのについて，〈排中律〉を用いるかどうか，また，〈人に関する公理（第2章，§7）〉を用いるかどうかにしたがって，古典論理・直観主義論理・最小論理というような区別をいたします．ですから，たとえ

ば，古典述語論理といえば，それは第２章に述べました演繹法の全体系を意味しているわけであります．

このような言葉遣いを用いますと，

すべてのトートロジーは古典命題論理の範囲で証明することができる

ということができます．この事実を(**古典**)**命題論理の完全性**とよびます．この完全性については，付録Ⅲ にその証明を述べておきました．

第5章　命題の同値

すでに第3章の §5 に述べましたように

$$(A \to B) \wedge (B \to A)$$

という命題のことを，われわれは

$$A \rightleftarrows B$$

という記号で表わし，これを〈A と B は同値である〉と読みます．

命題を真理値という観点から考察する場合には，A および B という2つの命題の真理値が一致するとき，ならびに，そのときに限って命題 $A \rightleftarrows B$ は真となるのでありました．しかし，このような見方は，さし当っては命題論理の範囲内でしか通用しない方法で，述語論理に対してはあまり効果がありません．$A \rightleftarrows B$ という形の命題がさほど重要でないというのならばとにかく，$\rightleftarrows$ というのが命題同士の $=$ に相当するものである以上，述語論理においても，そのようなものが自由に使えることが望ましいのです．そこで，この章では，命題の同値を表わす $\rightleftarrows$ の性質を，第2章に述べました演繹法をもとにして調べてみようと思います．そうすれば，そのようにして得られた結果はすべて述語論理に対しては——述語論理の一部分たる命題論理に対してはもちろんのこととして——通用することになるからです．

§0.　$\rightleftarrows$ の定義から直接にわかること

$A \rightleftarrows B$ の定義から直接に，

$$\frac{A \to B \quad B \to A}{A \rightleftarrows B} \qquad \frac{A \rightleftarrows B}{A \to B} \qquad \frac{A \rightleftarrows B}{B \to A}$$

という3つの推論規則を得ることができます．これらはそれぞれ

$$\wedge\text{-導入}\qquad \frac{C \quad D}{C\wedge D}$$

および

$$\wedge\text{-除去}\qquad \frac{C\wedge D}{C}\qquad \frac{C\wedge D}{D}$$

における C, D として，$A\rightarrow B$ および $B\rightarrow A$ を用いたものにほかなりません．

1.　以上の推論規則は全体としてつぎのことを意味しています：

$A\rightleftarrows B$ が成立するのは，$A\rightarrow B$ と $B\rightarrow A$ の両方が成立するとき，および，そのときに限る．

すなわち，$A\rightarrow B$ と $B\rightarrow A$ の両方が成立していれば，そのときは $A\rightleftarrows B$ も成立していますし，逆に $A\rightleftarrows B$ が成立しているときは $A\rightarrow B$ も $B\rightarrow A$ も成立しているのです．

2.　たとえば，とくに命題 B が A 自身に一致している場合には，$A\rightarrow B$ も $B\rightarrow A$ もともに

$$A\rightarrow A$$

となります．そしてこれは，第2章の §1における例6として証明しましたように，任意の命題 A に対して成立しますから，

$$A\rightleftarrows A$$

もまた任意の命題 A に対して成立するのであります．

A と B とが一応異なった命題であっても，もし A から B が［演繹法によって］導かれ，また B からも A が導かれるとすれば，$A\rightarrow B$ も $B\rightarrow A$ も成立するわけですから，$A\rightleftarrows B$ は成立することになります．

3.　こんどは逆に，$A\rightleftarrows B$ が成立している場合を考えてみましょう．そのときは，$A\rightarrow B$ も $B\rightarrow A$ も成立しているのですから，A からは B が導かれ，逆に B からも A が導かれるのです．要するに，A が成立すると主張する場合には，同時に，B が成立することも主張しているわけですし，B が成立すると主張する場合には，だまっていても A が成立することをも同時に主張していることになっているのです．$A\rightleftarrows B$ が成立するときには，命

題 A が成立するかしないか，ということと，命題 B が成立するかしないか，ということは同じことになります．そしてこのことが，$A \rightleftarrows B$ という命題を〈A と B とは**同値**（equivalent）である〉と読む1つの理由なのであります．

実際のところ，これだけの理由をもって，$A \rightleftarrows B$ を〈A と B は同値〉と読むのは行き過ぎだと思われる読者もおられるかも知れません．それは確かにその通りで，A が成立するかしないかということと，B が成立するかしないかということが同じならば，そのときにはいつでも $A \rightleftarrows B$ は成立する，とでもいえば，それで得心がいくのかも知れませんが……．しかし，いまのところ，それは無理な注文というべきです．なぜかというに，そのことは，演繹法というものが宿命的におわされている本質的な弱点に由来していることだからであります．

そもそも演繹法というものは，それによって命題の真偽を少しでも解き明かして行こうとする1つの方便としてわれわれ人間の考案したものに過ぎず，命題の真偽の完全なる姿はわれわれの手のとどかぬ彼岸にのみあるのであります．演繹法によって決定され得る命題の真偽はあくまでも命題の真偽のほんの一部であり，けっしてその全体ではありません．その意味において，演繹法とは本来未完成なもの，不完全なものなのであります．完全な演繹法などというものは，われわれ人間にとっては，はじめから望むべくもないもの，到底到達不可能なものと考えねばならぬものなのでありましょう．

$A \rightleftarrows B$ という命題が成立するということをもって，われわれは，A が成立すれば必ず B が成立し，逆に B が成立するときには A もまた成立しているという事実を表現しようとしました．これは確かなことであります．しかし，そのことを演繹法のみを基礎にして説明しつくすことは不可能なことです．たとえば，A が成立すれば必ず B が成立するということが事実上正しかったとしても，すなわち，$A \to B$ という命題が成立することが事実上正しかったにしても，われわれがそのことを演繹法のみによってつねに論証することができるとは限らないからであります．この章でわれわれが採用しております説明法——演繹法をもとにした説明というものには，つねにこのような限界があることに注意しておかなければなりません．

§1.　$\rightleftarrows$ に関する置換法則

$A \rightleftarrows B$ という命題が成立すれば，命題 A が成立するということと命題 B が成立するということが同じことになります．いわば，A と B とが〈**同じ**

命題〉または〈等しい命題〉であると考えることができます．もっとも，ここでいう〈同じ〉とか〈等しい〉とかいう言葉は，命題の表現形式といったような外見上のことに関していっているのではなく，命題によって表わされている内容というような，何かもっと実質的なことに関連して使われていると理解しなければなりません．しかし，〈命題の内容〉とは何か，というような議論をはじめても，実際的な効果はあまりありません．それよりもむしろ，〈同じ〉とか〈等しい〉という言葉によって表現された概念をどのように利用しようとするか，ということを直接に見ておく方がより早道であると思われます．

1.　任意の命題 A に対して，つねに

$$A \rightleftarrows A$$

が成立すること．これは，⇄ を〈等号〉と見なすための第1の要件です．しかし，§0 の2 においてすでに注意しておきましたように，このことは演繹法によって容易に証明することができますから，いまのところ問題はありません．

> $A \rightleftarrows A$ という命題が証明できるという事実によって，われわれの演繹法には，外見の同じ命題は内容も同じである，という考えが含まれていることがわかります．英語の also とドイツ語の also という語は外見は同じでも内容は違う，といったようなことは，いまは問題外にしなければなりません．

2.　外見が必ずしも一致しない2つの命題 A, B が等しいという知識をもとにしてわれわれが行なう最も基本的な操作は，必要に応じていつでも A を B に，また，B を A に置きかえるということであります．この事実を，ここでは**置換法則** (law of replacement) とよぶことにします．

> 置換法則は命題についての特有の法則ではありません．どんなものに対しても，〈同じ〉とか〈等しい〉とかいわれるものについてはつねに適用される一般原理であります．

3.　置換法則を推論図の形に表わせば，

$$(1)\quad \frac{A \rightleftarrows B \quad F(A)}{F(B)} \qquad (2)\quad \frac{A \rightleftarrows B \quad F(B)}{F(A)}$$

となります．ここで $F(A)$ とは，命題 A を一部に含む命題で，$F(B)$ はその A を B におきかえて得られる命題を意味します．

置換法則の意味は説明するまでもないでしょう．すなわち，$A \rightleftarrows B$ が成立する場合に，もし $F(A)$ が成立すれば $F(B)$ も成立し［(1)］，また，逆も正しい［(2)］ということです．

この置換法則 (1), (2) は，それぞれつぎのように表わしても同じことであります：

$$\frac{A \rightleftarrows B}{F(A) \to F(B)}, \qquad \frac{A \rightleftarrows B}{F(B) \to F(A)}.$$

これらを一括して

$$\frac{A \rightleftarrows B}{F(A) \rightleftarrows F(B)}$$

としておけば，これで (1) と (2) の両方を含んでいることになります．また，これを

$$(A \rightleftarrows B) \to (F(A) \rightleftarrows F(B))$$

という命題で表わしても同じことであります．

4.　置換法則は形式上さらに一般化することもできます．たとえば，

$$\frac{A \rightleftarrows A' \quad B \rightleftarrows B'}{F(A,B) \rightleftarrows F(A',B')}$$

というように2つの置換を同時に行なうものも考えることはできますが，これもまた，(1) や (2) の型の置換を繰りかえすことによって得られるのであります．

問　この事実を実際に確かめよ．

5.　さて，気分の上からいうと，ここに述べましたような置換法則を演繹法における基本的な推論規則または公理の1つとしてつけ加えるのが適当なようにも思われます．しかし，実際に現われる多くの場合については，置換法則の正しいことを第2章に述べました演繹法の範囲内で導くことができますし (§5)，また，置換法則を最も一般的な形において認めることについては難点がないわけではありません (§4)．とにかく，ここでは，簡単な場

合からまず話を始めることにいたしましょう．

§ 2.　置換法則の特殊な場合

この § では

$$\frac{A \rightleftarrows A'}{F(A) \rightleftarrows F(A')} \qquad \frac{A \rightleftarrows A' \quad B \rightleftarrows B'}{F(A,B) \rightleftarrows F(A',B')}$$

という形の置換法則を，$F(A)$ ならびに $F(A,B)$ が

$$\neg A, \qquad A \to B, \qquad A \wedge B, \qquad A \vee B$$

という特殊な形をもつ場合について，演繹法から導いておきます．このことは，単にこのような特殊な場合というにとどまらず，置換法則をより一般な場合についても成り立たせるための基礎となるものであります．

1.　$F(A)$ が $\neg A$ の場合：

証明すべきことは

$$\frac{A \rightleftarrows A'}{\neg A \rightleftarrows \neg A'}$$

であります．

証明

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\overset{1}{A'} \quad \cfrac{A \rightleftarrows A'}{A' \to A}}{A} \quad \overset{2}{\neg A}}{\curlywedge}}{\neg A'}\;1}{\neg A \to \neg A'}\;2$$

として，$A \rightleftarrows A'$ という仮定から $\neg A \to \neg A'$ が導かれます．まったく同様な方法で，同じ仮定から $\neg A' \to \neg A$ を導くこともできます．したがって，$A \rightleftarrows A'$ という仮定から $\neg A \rightleftarrows \neg A'$ を導くことができるわけです．

2.　$F(A,B)$ が $A \to B$ の場合：

証明すべきことは

$$\frac{A \rightleftarrows A' \quad B \rightleftarrows B'}{(A \to B) \rightleftarrows (A' \to B')}$$

であります．

証明

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{A'} \quad \dfrac{A \rightleftarrows A'}{A' \to A}}{A} \quad \overset{2}{A \to B}}{B} \quad \dfrac{B \rightleftarrows B'}{B \to B'}}{B'}}{A' \to B'}\,1}{(A \to B) \to (A' \to B')}\,\mathbf{2}$$

これは，$A \rightleftarrows A'$ と $B \rightleftarrows B'$ という2つの仮定から

$$(A \to B) \to (A' \to B')$$

を導く演繹です．まったく同様にして，同じ仮定から

$$(A' \to B') \to (A \to B)$$

を導くこともできます．

3.　$F(A, B)$ が $A \wedge B$ の場合：

$$\dfrac{A \rightleftarrows A' \qquad B \rightleftarrows B'}{(A \wedge B) \rightleftarrows (A' \wedge B')}$$

証明

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{A \wedge B}}{A} \quad \dfrac{A \rightleftarrows A'}{A \to A'}}{A'} \quad \dfrac{\dfrac{\overset{1}{A \wedge B}}{B} \quad \dfrac{B \rightleftarrows B'}{B \to B'}}{B'}}{A' \wedge B'}}{(A \wedge B) \to (A' \wedge B')}\,1$$

$(A' \wedge B') \to (A \wedge B)$ についても同様であります．

4.　$F(A, B)$ が $A \vee B$ の場合：

$$\dfrac{A \rightleftarrows A' \qquad B \rightleftarrows B'}{(A \vee B) \rightleftarrows (A' \vee B')}$$

証明

$$\dfrac{\dfrac{\overset{2}{A \vee B} \quad \dfrac{\dfrac{\overset{1}{A} \quad \dfrac{A \rightleftarrows A'}{A \to A'}}{A'}}{A' \vee B'} \quad \dfrac{\dfrac{\overset{1}{B} \quad \dfrac{B \rightleftarrows B'}{B \to B'}}{B'}}{A' \vee B'}}{A' \vee B'}\,\vee\text{-除去}\,\mathbf{1}}{(A \vee B) \to (A' \vee B')}\,2$$

$(A' \vee B') \to (A \vee B)$ についても同様．

§ 3.　∀および∃との関連

ここでは，話がちょっと置換法則からずれるように見えますが——じつはズレていないのです——，後の都合上

$$\frac{\forall x(F(x)\rightleftarrows F'(x))}{\forall xF(x)\rightleftarrows\forall xF'(x)}\qquad\frac{\forall x(F(x)\rightleftarrows F'(x))}{\exists xF(x)\rightleftarrows\exists xF'(x)}$$

という推論の正しいことを証明しておきます．

1.　$\dfrac{\forall x(F(x)\rightleftarrows F'(x))}{\forall xF(x)\rightleftarrows\forall xF'(x)}$ **の証明**

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\forall xF(x)}}{F(a)}\qquad\dfrac{\dfrac{\forall x(F(x)\rightleftarrows F'(x))}{F(a)\rightleftarrows F'(a)}}{F(a)\to F'(a)}}{F'(a)}}{\forall xF'(x)}\;\forall\text{-導入}}{\forall xF(x)\to\forall xF'(x)}\;1$$

これは，$\forall x(F(x)\rightleftarrows F'(x))$ という仮定のもとでの

$$\forall xF(x)\to\forall xF'(x)$$

に到る演繹です．ここで a と書きました自由変数としては，$F(x)$ および $F'(x)$ **に含まれない**ものを選んでおきます．そうすれば，上記の演繹における ∀-導入に対する**変数条件**はみたされております（第２章の §5 参照）．

$\forall xF'(x)\to\forall xF(x)$ に到る演繹もまったく同様です．

2.　$\dfrac{\forall x(F(x)\rightleftarrows F'(x))}{\exists xF(x)\rightleftarrows\exists xF'(x)}$ **の証明**

$$\dfrac{\dfrac{\overset{2}{\exists xF(x)}\qquad\dfrac{\dfrac{\overset{1}{F(a)}\qquad\dfrac{\dfrac{\forall x(F(x)\rightleftarrows F'(x))}{F(a)\rightleftarrows F'(a)}}{F(a)\to F'(a)}}{F'(a)}}{\exists xF'(x)}}{\exists xF'(x)}\;\exists\text{-除去}\,1}{\exists xF(x)\to\exists xF'(x)}\;2$$

ここでも，a は $F(x)$ および $F'(x)$ **に含まれていない**自由変数とします．そうすると，∃-除去に対する**変数条件**はみたされることになります（第２章の §6 参照）．

$\exists xF'(x)\to\exists xF(x)$ についても同様．

§ 4.　置換法則の意味

再び置換法則に立ちかえって考えてみます.

1.　$A \rightleftarrows B$が成立するときAとBとを〈等しい〉と考える根拠は，Aが成立することとBが成立することとが同じことだということにあるのでした．したがって，

$$(A \rightleftarrows B) \to (F(A) \rightleftarrows F(B))$$

における命題$F(A)$は，$F(A)$が成立するかどうかということ，すなわち，$F(A)$の真偽が，Aの真偽だけによって定まるものでなければなりません．命題$F(A)$の真偽が，何か真偽以外のAの内容といったようなものによって左右されるような場合には，置換法則は必ずしも成立しないのです．

たとえば，〈Aという命題は日本語で書かれている〉という命題を$F(A)$と表わせば，このFに対して置換法則は成立しないでしょう．Aと同値で，しかも英語で書かれた命題もあるでしょうから．

2.　記号論理学で命題を考える場合には，もっぱら命題の真偽だけを問題にする．たとえば，日本語で書かれているか英語で書かれているか，あるいは数式として表わされているなどというようなことは，命題の表現の問題であって，命題そのものに関する性質ではない．命題の表現と命題そのものとは異なったもので，記号論理で問題とするのは，命題そのものだけである．このような考えは世の中に広く通用しているものです．これは確かに一面の真理を伝えるもので，命題というものに対しては，真偽以外の要素は考えないという考えであります．そしてこのような考えが，第3章で述べましたような〈真理値〉による論理の研究を促進する原動力となったことに間違いはありません．

もっとも，このような主張も，もちろん程度問題で，また別の場合には，記号論理は命題の形式だけをとり扱い，真偽のように命題の内容に関係したものはいっさい問題にしない，などと正反対みたいなことをいわれる場合もあるのです．

このような言葉を表面的に受取って，空虚な形式的論議に花を咲かせるのは，真実を追究する者のなすべき業ではありません．むしろ，その言葉によって表現されようとしている実質的な内容を汲み取るべきであります．記号論理という1つの体系をとってみても，それはいろいろな角度から理解することができるものだ

からです.
記号論理の体系を作り上げるためには，まずその設計図を作らねばなりません．そこでは，記号論理によってどういう内容のことを表現させせようかという考えをきめておく必要があります．命題の真偽だけを問題にしようというのは，記号論理の設計図を引くときの心構えであります．そして，設計図が完全に出来上ったうえは，こんどは，設計図に忠実な記号論理を作るための形式を問題にしなければならぬのです．極端に言えば，設計図さえ完全であるならば，設計図を考えたときの心構えなどすっかり忘れてしまってもよいわけで，むしろ設計図に忠実である方が望ましいのです．記号論理が形式のみをとり扱うというのは，このような記号論理の体系を作るときの話であります．一方は記号論理の背景にある考え方であり，記号論理の内容を理解する方法であるのに反し，他方は，記号論理の体系を，そのままの形で，形式的に正確に理解するための1つの方法であるのです．本書においては，この2つの考えが交互に現われてくることに，とくにご注意願いたいと思います．

3.　命題 $F(A)$ の真偽が命題 A の真偽のみによって定まるとき，$F(A)$ を A の関数と考えて，このような F を**真理関数**（truth-value function）とよびます．F が真理関数であるということは，任意の命題 A, B に対して，置換法則

$$(A \rightleftarrows B) \to (F(A) \rightleftarrows F(B))$$

が成り立つための1つの条件となるように思われたのでした．では，F が真理関数であるということを，演繹法の上で，どのように表現したらよいのでしょうか？　私の考えるところ，せんじつめると，どうも結局のところ本質的には，置換法則の成り立つような F のことを真理関数という，と定義する以外に手はないように思われます．

真理関数に対しては置換法則は成立する．しかし，真理関数とは置換法則が成立するもののことである．これでは，置換法則とは何もいっていないのと同じことになってしまいます．少なくとも，置換法則というものから，われわれは何の知識をも得ることはできません．

4.　置換法則を演繹法における公理として採用すればよろしい．こう考える人もなかにはおります．しかしそれでは，なんら問題を解決したことにはならないのです．これは，難問からの単なる逃避に過ぎません．

演繹法の公理に置換法則を入れるということは，真理関数ならざる F を演繹法から除外することを意味します．置換法則を公理にしたからといって，与えられた F がはたして演繹法から除外さるべきものか，あるいは，演繹法において許されるところの真理関数であるかどうかということが，急に判定できるようになるものでもありますまい．要するに，与えられた F が真理関数であるかどうかを判定することは，依然として先決問題として残っているのであります．

5.　与えられた F が真理関数であるか否かを決定せよ，という問題を一般的に解決することは，原理的な困難性を含んでおります．われわれは，つぎの§において，ある確定した範囲における F がじじつ真理関数となっているということを指摘するにとどめましょう．その範囲の F だけでも十分実用に堪えうるものなのであります．

真理関数を決定する問題の原理的な困難性は，じつは，命題という概念の曖昧性に由来しているのであります．F が与えられるということは，じつのところ，一般的には何が与えられるのかよくわからない．その事の意味がよくわからない以上，われわれは，F の与えられ方をある程度限定した上で，その問題を解決する以外に方法はないということなのであります．以下に述べますものは，単なるその一例に過ぎません．

§5.　置換定理

この§で証明することを，先まわりしておおざっぱに述べておくと，

$$\to,\quad \wedge,\quad \vee,\quad \neg,\quad \forall,\quad \exists$$

という論理記号を用い，命題 A ならびに他のいくつかの命題の組み合わせとして表わされる命題を $F(A)$ と表わせば，このような F に対しては置換法則が成立するということです．**置換定理** (replacement theorem) というのはこの事実を指す名称であります．

1.　置換定理を述べる準備として，まず，〈命題変数 X を含む論理式〉という概念を定義いたします．

命題変数 X を含む論理式を表わすには

$$\mathscr{F}(X), \quad \mathscr{F}_1(X), \quad \mathscr{F}_2(X), \quad \mathscr{G}(X)$$

というような記号を用います.

X は命題変数とよばれる単なる記号で，それはけっして命題ではありませんから，$F(X)$ というようなものは一般には命題ではありません．それは1つの表現形式であります．X に命題 A を代入してはじめて $F(X)$ は命題 $F(A)$ となるのです．あたかも，x を変数とする多項式 $f(x)$ は数ではなく，単なる1つの表現形式に過ぎませんが，x に数 a を代入した $f(a)$ は数を表わす，というのとまったく同様であります．もっとも，定数も一種の多項式であると考えるのと同様に，変数 X を含まない命題も〈X を含む論理式〉の一種と考えます.

〈命題変数 X を含む論理式〉の定義

以下，簡単のために，単に〈論理式〉といえば，それは X を含む論理式のことであるとします.

1)　X 自身はそれだけで論理式と考えます.

2)　任意の命題も論理式であるとします.

3)　$\mathscr{F}_1(X)$ および $\mathscr{F}_2(X)$ が論理式ならば,

$$\mathscr{F}_1(X) \to \mathscr{F}_2(X), \quad \mathscr{F}_1(X) \wedge \mathscr{F}_2(X), \quad \mathscr{F}_1(X) \vee \mathscr{F}_2(X)$$

はすべて論理式であります.

4)　$\mathscr{F}_1(X)$ が論理式ならば，$\neg\mathscr{F}_1(X)$ も論理式であります.

5)　$\mathscr{F}_1(a, X)$ が論理式ならば,

$$\forall x \mathscr{F}_1(x, X) \qquad \text{および} \qquad \exists x \mathscr{F}_1(x, X)$$

も論理式であります．ここで，a は任意の自由変数で x は $\mathscr{F}_1(a, X)$ に含まれない任意の束縛変数です.[1)]

そうして，以上の 1) と 2) をもとにし，3)，4)，5) の操作を有限回くりかえして作られるものだけを，われわれは〈X を含む論理式〉とよぶのであります.

---

1)　x がすでに $\mathscr{F}_1(a, X)$ の内部で用いられている束縛変数としますと，解釈上の混乱を起こすことがあり得ます．そのために，x としては $\mathscr{F}_1(a, X)$ のなかでは用いられていない**新しい**束縛変数を用いることにしておいたのです.

あります．

2.　論理式 $\mathscr{F}(X)$ における命題変数 X に任意の命題 A を代入した結果 $\mathscr{F}(A)$ が1つの命題を表わすこと，ならびに，$\mathscr{F}(A)$ がどのような命題を表わすかということは，論理式の定義から明らかでありましょう．

これについて，つぎの置換定理が成立します．

置換定理　$\mathscr{F}(X)$ が命題変数 X を含む任意の論理式であるとき，演繹法によって

$$(\boldsymbol{A} \rightleftarrows \boldsymbol{B}) \to (\mathscr{F}(\boldsymbol{A}) \rightleftarrows \mathscr{F}(\boldsymbol{B}))$$

という命題を証明することができる．

ここで，$\mathscr{F}(B)$ は $\mathscr{F}(A)$ のなかのいくつかの A を B に置き換えたものですが，$\mathscr{F}(A)$ のなかのすべての A を B に置き換える必要はありません．もとの論理式 $\mathscr{F}(X)$ にもどって考えたとき X と書いてある場所における A だけを B に置き換えればよいのです．要するに，好きなところだけ A を B に置き換えてよいということであります．

3.　**置換定理の証明**

置換定理を証明するには，$A \rightleftarrows B$ を仮定して

$$\mathscr{F}(A) \rightleftarrows \mathscr{F}(B)$$

を導けばよいのです．そして，そのことを示す演繹は，論理式 $\mathscr{F}(X)$ を作る順序にしたがって作っていくことができます．

3.1.　$\mathscr{F}(X)$ が X 自身の場合：

$\mathscr{F}(A)$ とは命題 A のことであり，$\mathscr{F}(B)$ とは命題 B のことでありますから，$\mathscr{F}(A) \rightleftarrows \mathscr{F}(B)$ は $A \rightleftarrows B$ ということになり，それは仮定そのものですから当然その仮定から導くことができるわけです．

3.2.　$\mathscr{F}(X)$ が X を含まない場合：

これは，$\mathscr{F}(X)$ がある命題 C であるときということです．そして，そのときは，$\mathscr{F}(A)$ も $\mathscr{F}(B)$ もともにこの命題 C を表わしています．ですから，$\mathscr{F}(A) \rightleftarrows \mathscr{F}(B)$ は $C \rightleftarrows C$ という命題を表わしますが，これは何の仮定もなしに導くことができます．

3.3.　$\mathscr{F}(X)$ が

$$\mathscr{F}_1(X) \to \mathscr{F}_2(X), \quad \mathscr{F}_1(X) \wedge \mathscr{F}_2(X), \quad \mathscr{F}_1(X) \vee \mathscr{F}_2(X)$$

のいずれかの形をしている場合：

これは，**1**における〈命題変数 X を含む論理式〉の定義の 3) に相当する場合です．$A \rightleftarrows B$ を仮定として

$$\mathscr{F}(A) \rightleftarrows \mathscr{F}(B)$$

を導く演繹を，$\mathscr{F}(X)$ を作る順序にしたがって作っていく方法を説明するためには，同じ仮定のもとでの

$$\mathscr{F}_1(A) \rightleftarrows \mathscr{F}_1(B) \quad \text{および} \quad \mathscr{F}_2(A) \rightleftarrows \mathscr{F}_2(B)$$

を導く演繹はすでにわかっているとし，それらをもとにして

$$\mathscr{F}(A) \rightleftarrows \mathscr{F}(B)$$

を導く演繹の作り方を説明すれば十分であります．

3.31.　$\mathscr{F}(X)$ が $\mathscr{F}_1(X) \to \mathscr{F}_2(X)$ という形の場合：

この場合，$\mathscr{F}(A)$ および $\mathscr{F}(B)$ とは，それぞれ，

$$\mathscr{F}_1(A) \to \mathscr{F}_2(A) \quad \text{および} \quad \mathscr{F}_1(B) \to \mathscr{F}_2(B)$$

であります．ですから，$A \rightleftarrows B$ を仮定しての

$$\mathscr{F}_1(A) \rightleftarrows \mathscr{F}_1(B) \quad \text{および} \quad \mathscr{F}_2(A) \rightleftarrows \mathscr{F}_2(B)$$

に到る演繹につづけて，§2の**2**で証明した推論

$$\frac{\mathscr{F}_1(A) \rightleftarrows \mathscr{F}_1(B) \qquad \mathscr{F}_2(A) \rightleftarrows \mathscr{F}_2(B)}{(\mathscr{F}_1(A) \to \mathscr{F}_2(A)) \rightleftarrows (\mathscr{F}_1(B) \to \mathscr{F}_2(B))}$$

を行なえば，それで，$A \rightleftarrows B$ を仮定としての

$$\mathscr{F}(A) \rightleftarrows \mathscr{F}(B)$$

に到る演繹が得られたことになります．

3.32.　$\mathscr{F}(X)$ が

$$\mathscr{F}_1(X) \wedge \mathscr{F}_2(X) \quad \text{または} \quad \mathscr{F}_1(X) \vee \mathscr{F}_2(X)$$

という形の場合も，3.31 とまったく同様（§2の**3**および**4**）．

3.4.　$\mathscr{F}(X)$ が $\neg\mathscr{F}_1(X)$ という形の場合：

まえと同様に考えればよろしい（§2の**1**）．

3.5.　$\mathscr{F}(X)$ が

$$\forall x \mathscr{F}_1(x, X) \quad \text{または} \quad \exists x \mathscr{F}_1(x, X)$$

という形をしている場合：

このときも，$\mathscr{F}_1(a, A) \rightleftarrows \mathscr{F}_1(a, B)$ に到る演繹がすでに得られているとして，それから $\mathscr{F}(A) \rightleftarrows \mathscr{F}(B)$ を導く演繹の作り方を説明すれば十分です．しかも，ここで用いた自由変数 a は $\mathscr{F}_1(x, X)$ に含まれない限り何でもよいはずですから，A とか B という命題に含まれないものとしておきます．そうすれば，$\mathscr{F}_1(a, A) \rightleftarrows \mathscr{F}_1(a, B)$ を導く演繹の仮定 $A \rightleftarrows B$ に a は含まれないことになりますから，$\forall$－導入という推論を用いると，$A \rightleftarrows B$ という仮定から

$$\forall x(\mathscr{F}_1(x, A) \rightleftarrows \mathscr{F}_1(x, B))$$

が導かれることになります．

3.51.　$\mathscr{F}(X)$ が $\forall x \mathscr{F}_1(x, X)$ という形の場合：

$\mathscr{F}(A)$ および $\mathscr{F}(B)$ は，それぞれ

$$\forall x \mathscr{F}_1(x, A) \quad \text{および} \quad \forall x \mathscr{F}_1(x, B)$$

を意味します．ですから，

$$\forall x(\mathscr{F}_1(x, A) \rightleftarrows \mathscr{F}_1(x, B))$$

を導く演繹に続けて

$$\frac{\forall x(\mathscr{F}_1(x, A) \rightleftarrows \mathscr{F}_1(x, B))}{\forall x \mathscr{F}_1(x, A) \rightleftarrows \forall x \mathscr{F}_1(x, B)}$$

という推論を行なえば（§3の**1**），$\mathscr{F}(A) \rightleftarrows \mathscr{F}(B)$ に到る演繹が得られるのであります．

3.52.　$\mathscr{F}(X)$ が $\exists x \mathscr{F}_1(x, X)$ という形の場合も 3.51 と同様にすればよろしい（§3の**2**）．

以上で置換定理の証明は終りました．

4.　われわれは今後，置換定理の適用範囲内において $\rightleftarrows$ を〈等号〉としてとり扱います．ただし，置換定理の適用範囲を超えて一般の置換法則を用いる場合には，その都度，相当の注意を必要とすることは言うまでもありません．

§ 6. 述語の同値

2つの述語 F と G に対して

$$\forall x(F(x) \rightleftarrows G(x))$$

という命題が成立するとき，このFとGとは**同値**であるといいます．しかも，この〈同値〉という関係についても**置換定理**

$$\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \rightleftarrows \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})) \to (\mathcal{F}(\boldsymbol{F}) \rightleftarrows \mathcal{F}(\boldsymbol{G}))$$

が成立します．ここで，F と G とはいずれも任意の［1変数の］述語であり，$\mathcal{F}(P)$ は任意の〈述語変数 P を含む論理式〉でありますが，定理の意味をはっきりさせるためには，P を含む論理式というものの定義を述べておかねばなりません．

1. 〈述語変数 P を含む論理式〉の定義

まず，P を与えられた［1変数の］述語変数としておき，簡単のために，以下単に〈論理式〉といえば，それは P を含む論理式のこととします．

定義の方法は，〈命題変数を含む論理式〉に対するのとまったく同様であります．

1) 任意の対象式 t に対して，$P(t)$ は論理式であると考えます．

2) 任意の命題も論理式であるとします．

3) $\mathcal{F}_1(P)$ および $\mathcal{F}_2(P)$ が論理式ならば

$$\mathcal{F}_1(P) \to \mathcal{F}_2(P), \quad \mathcal{F}_1(P) \wedge \mathcal{F}_2(P), \quad \mathcal{F}_1(P) \vee \mathcal{F}_2(P)$$

はすべて論理式であります．

4) $\mathcal{F}_1(P)$ が論理式ならば，$\neg\mathcal{F}_1(P)$ も論理式であります．

5) $\mathcal{F}_1(a, P)$ が論理式ならば，

$$\forall x\mathcal{F}_1(x, P) \quad \text{および} \quad \exists x\mathcal{F}_1(x, P)$$

も論理式であります．ここで，a は任意の自由変数，x は $\mathcal{F}_1(a, P)$ に含まれない任意の束縛変数です．

以上の 1)，2) をもとにして，3)，4)，5) の操作を有限回くりかえし得られるものを〈P を含む論理式〉とよびます．

例　Fを1変数の述語とすれば

$$\forall x(P(x) \to F(x))$$

は Pを含む論理式です．何となれば，自由変数 a に対して，1) によれば $P(a)$ は論理式であり，2) によれば $F(a)$ も論理式，よって，3) により $P(a) \to F(a)$ が論理式であることがわかり，5) から $\forall x(P(x) \to F(x))$ が論理式ということになります．また，この

$$\forall x(P(x) \to F(x))$$

という論理式を $\mathcal{F}(P)$ と表わせば，任意の［1変数の］述語 G に対して，$\mathcal{F}(G)$ とは

$$\forall x(G(x) \to F(x))$$

という命題を意味します．とくに，$\mathcal{F}(F)$ は

$$\forall x(F(x) \to F(x))$$

という命題です．

2.　述語に対する置換定理の証明の概要

これも，〈命題に対する置換定理（§5）〉の証明と同様に，

$$\forall x(F(x) \rightleftarrows G(x))$$

という仮定から

$$\mathcal{F}(F) \rightleftarrows \mathcal{F}(G)$$

を導く演繹を作ることを考えるのが一番簡単であると思います．

2.1.　$\mathcal{F}(P)$ が $P(t)$ という形の場合：

これは，〈Pを含む論理式〉の定義の 1) に相当する場合です．この場合には，$\mathcal{F}(F)$ とは $F(t)$ のことで，$\mathcal{F}(G)$ とは $G(t)$ のことであります．ですから，演繹によって導くべき結論 $\mathcal{F}(F) \rightleftarrows \mathcal{F}(G)$ とは

$$F(t) \rightleftarrows G(t)$$

という命題でありますが，これは，仮定

$$\forall x(F(x) \rightleftarrows G(x))$$

から $\forall$-除去により直接導くことができます．

2.2.　〈Pを含む論理式〉の定義の 2)—5) に相当する場合は，§5 の 3.2

—3.5 とまったく同様にすればよろしい．とくに，3) — 5) に相当する場合には，§2 と §3 の結果を用いるのであります．

3. 以上は **〈1 変数の述語〉** について述べたのでありますが，**2 変数以上の述語**についてもまったく同様な置換定理が成立することは，もはや言うまでもないことと思います．詳細については，読者の自習に期待することにいたします．

第6章　ド・モルガンの法則と双対の原理

§0.　2重否定の法則

〈ド・モルガンの法則〉というものを用いて〈双対の原理〉を説明するのには〈2重否定の法則〉というものを用いるのが便利であります．のみならず，それは，ド・モルガンの法則の証明の簡易化にも役立つのです．要するに，この§に説明することは，この章全体の実質的基礎を与えるものであります．

2重否定の法則とは

$$\neg\neg A \rightleftarrows A$$

という同値式で表わされる内容を意味します．この式を証明するのには

$$\neg\neg A \to A \quad \text{および} \quad A \to \neg\neg A$$

の2つを証明すれば十分です．

1.　$\neg\neg A \to A$　は〈2重否定の除去の法則〉それ自身で，第2章の§8で説明したように，演繹法の公理と考えてよいものでありますから，もはや証明する必要のないものです．

2.　$A \to \neg\neg A$　はつぎのようにして証明することができます：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{2}{A} \qquad \overset{1}{\neg A}}{\curlywedge}}{\neg\neg A}\,1}{A \to \neg\neg A}\,2.$$

§1.　ド・モルガンの法則（その1）

ド　モルガン（De Morgan）**の法則**とは

$$\begin{cases} \neg(\boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{B}) \rightleftarrows \neg\boldsymbol{A}\wedge\neg\boldsymbol{B} \\ \neg(\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B}) \rightleftarrows \neg\boldsymbol{A}\vee\neg\boldsymbol{B} \end{cases}$$

という 2 つの同値式によって表わされる内容のことです．

これらの同値式は，くわしくは

$$[\neg(A\vee B)] \rightleftarrows [(\neg A)\wedge(\neg B)]$$
$$[\neg(A\wedge B)] \rightleftarrows [(\neg A)\vee(\neg B)]$$

と書くべきかもしれませんが，簡単のためにカッコを適当に省略してあります．

2 重否定の法則についても

$$(\neg\neg A) \rightleftarrows A$$

とすべきであったかも知れませんが，それについても同様であります．

1.　$\neg(A\vee B) \rightleftarrows \neg A\wedge\neg B$　の証明

これには，

$$\neg(A\vee B) \to \neg A\wedge\neg B$$

および

$$\neg A\wedge\neg B \to \neg(A\vee B)$$

の 2 つを証明すれば十分です．

1.1.　$\neg(A\vee B) \to \neg A\wedge\neg B$　の証明：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{A}}{A\vee B}\qquad \overset{3}{\neg(A\vee B)}}{\curlywedge}}{\neg A}{\scriptstyle 1}\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{2}{B}}{A\vee B}\qquad \overset{3}{\neg(A\vee B)}}{\curlywedge}}{\neg B}{\scriptstyle 2}}{\neg A\wedge\neg B}}{\neg(A\vee B)\to\neg A\wedge\neg B}{\scriptstyle 3}$$

1.2.　$\neg A\wedge\neg B \to \neg(A\vee B)$　の証明：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{2}{A\vee B}\qquad \dfrac{\overset{1}{A}\qquad \dfrac{\overset{3}{\neg A\wedge\neg B}}{\neg A}}{\curlywedge}\qquad \dfrac{\overset{1}{B}\qquad \dfrac{\overset{3}{\neg A\wedge\neg B}}{\neg B}}{\curlywedge}}{\curlywedge}{\scriptstyle \vee\text{-除去}\,1}}{\neg(A\vee B)}{\scriptstyle 2}}{\neg A\wedge\neg B\to\neg(A\vee B)}{\scriptstyle 3}$$

2.　$\neg(A\wedge B) \rightleftarrows \neg A\vee\neg B$　の証明

これも 1 におけるのと同様に直接証明することもできますが，すでに証明

された結果

$$\neg(A \vee B) \rightleftarrows \neg A \wedge \neg B$$

を用い，〈2重否定の法則〉を利用して，つぎのようにした方が少し簡単かと思います．すなわち：

上の A および B の代わりに $\neg A$ および $\neg B$ を用いれば

$$\neg(\neg A \vee \neg B) \rightleftarrows \neg\neg A \wedge \neg\neg B$$

が証明されるはずです．ここで2重否定の法則を利用して

$$\neg(\neg A \vee \neg B) \rightleftarrows A \wedge B$$

が証明されることがわかり，さらに両辺の否定をとった

$$\neg\neg(\neg A \vee \neg B) \rightleftarrows \neg(A \wedge B)$$

が証明されることがわかります．さらにもういちど2重否定の法則を用いますと

$$\neg A \vee \neg B \rightleftarrows \neg(A \wedge B)$$

が証明されることもわかりますが，これが，いま問題にしているド・モルガンの法則の後半であります．

問　$\neg(A \wedge B) \rightleftarrows \neg A \vee \neg B$ を第2章に述べた演繹法によって直接証明せよ．

ド・モルガンの法則の意味はいまさら説明するまでもないと思いますが，たとえば英語の **neither *A* nor *B*** というのは，英語の語感からすれば $A \vee B$ (either A or B) の否定 $\neg(A \vee B)$ ではないかと思われます．本当のところはわたくしは英語の語感など全然わからないので，あまり当てにされても困りますが，もしわたくしの想像が当っているとすれば，英語で $\neg(A \vee B)$〔すなわち：neither A nor B〕というのを日本語に訳して $\neg A \wedge \neg B$〔すなわち：A でもなく B でもない〕というのであります．ド・モルガンの法則

$$\neg(A \vee B) \rightleftarrows \neg A \wedge \neg B$$

の左辺を表わす英語を日本語に訳すときには右辺を用いている，ということになっているわけです．

§ 2.　ド・モルガンの法則（その 2）

$$\begin{cases} \neg\exists x F(x) \rightleftarrows \forall x \neg F(x) \\ \neg\forall x F(x) \rightleftarrows \exists x \neg F(x) \end{cases}$$

のことも**ド・モルガンの法則**とよんでいます．

1.　$\neg\exists x F(x) \rightleftarrows \forall x \neg F(x)$　の証明

1.1.　$\neg\exists x F(x) \to \forall x \neg F(x)$　の証明：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{F(a)}}{\exists x F(x)} \qquad \overset{2}{\neg\exists x F(x)}}{\curlywedge}}{\neg F(a)}\,1}{\forall x \neg F(x)}\,\forall\text{-導入}}{\neg\exists x F(x) \to \forall x \neg F(x)}\,2$$

ここで a としては，$F(x)$ に含まれていない自由変数を用います．そうすることによって，$\forall$－導入に対する変数条件はみたされます．

1.2.　$\forall x \neg F(x) \to \neg\exists x F(x)$　の証明：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{2}{\exists x F(x)} \qquad \dfrac{\overset{1}{F(a)} \qquad \dfrac{\overset{3}{\forall x \neg F(x)}}{\neg F(a)}}{\curlywedge}}{\curlywedge}\,\exists\text{-除去}\,1}{\neg\exists x F(x)}\,2}{\forall x \neg F(x) \to \neg\exists x F(x)}\,3$$

ここでも，a としては，$F(x)$ に含まれない自由変数を選びます．それによって，$\exists$－除去に対する変数条件はみたされます．

2.　$\neg\forall x F(x) \rightleftarrows \exists x \neg F(x)$　の証明

まえの 1 の結果の $F(x)$ の代わりに $\neg F(x)$ を用いて

$$\neg\exists x \neg F(x) \rightleftarrows \forall x \neg\neg F(x).$$

2 重否定の法則を用いて

$$\neg\exists x \neg F(x) \rightleftarrows \forall x F(x).$$

両辺の否定をとって，

$$\neg\neg\exists x \neg F(x) \rightleftarrows \neg\forall x F(x).$$

再び 2 重否定の法則を用いて

$$\exists x \neg F(x) \rightleftarrows \neg \forall x F(x).$$

問　$\neg \forall x F(x) \rightleftarrows \exists x \neg F(x)$ を演繹法によって直接証明せよ．

§3.　ド・モルガンの法則の形式の一般化

以上に述べて参りました〈ド・モルガンの法則〉というものは，個々の命題や述語の内容には関係のない法則，もし演繹法を無条件に認めるとするならば，それによって全く形式的に導かれる純粋に形式的な法則であるわけです．ですから，その形式をさらに一般的に論じようとしますならば，個々の命題や述語との関係をたちきって，命題の代わりに命題変数を，そして述語の代わりには述語変数を用いる方が，考え方をより鮮明にさせることができると思います．

なにも〈ド・モルガンの法則〉の場合に限らず，演繹法の一般論に関する限り，すべては命題変数・述語変数でこと足りるのです．正しい命題だからといって，つねに演繹法によって証明できるわけのものでもありませんし，述語の内容を知っていたとしても，その性質を演繹の一般論でとり扱うことは，ほとんどの場合不可能なのです．何となれば，演繹の一般論は，あくまでも演繹の形式そのものだけをとり扱うものであるのですから．

いま，いくつかの命題変数といくつかの述語変数から作られる論理式を考えます．そのような〈論理式〉の定義をあらためて述べる必要もないとは思いますが，念のために一応記しておきます：

〈論理式〉の定義

1)　個々の命題変数は，それ自身で論理式であると考えます．また，P を任意の n 変数の述語変数とするとき，任意の対象式 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ に対して $P(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ は論理式であります．[1)]

2)　$\mathcal{A}$ および $\mathcal{B}$ が論理式であるとき，$\mathcal{A} \to \mathcal{B}$，$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$，$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ はす

---

1)　ここでは，〈対象式〉とは何かということは，さほど重要な問題ではありません．ただ，個々の〈自由変数〉がすべて対象式としてとり扱われること，ならびに，対象式は〈束縛変数〉を含んでいないという，この2点にだけ注意して下されば十分です．本書の全体を通じて，**対象式とは自由変数のことである**と考えて下さっても，大部分の話は通じると思います．

べて論理式です．また，$\mathscr{A}$ が論理式ならば $\neg\mathscr{A}$ も論理式であるとします．

3)　$\mathscr{F}(a)$ が論理式で a が自由変数であるとき，$\mathscr{F}(a)$ に含まれない任意の束縛変数 x を用いて作られる $\forall x\mathscr{F}(x)$ および $\exists x\mathscr{F}(x)$ は論理式であります．

そうして，ここでは，上の 1) におけるような論理式をもとにして，2) や 3) の操作を有限回ほどこして得られる論理式だけを考えようというのであります．

ここで考える〈論理式〉が最も普通の意味における論理式でありまして，第５章で定義しました〈命題変数 X を含む論理式〉とか〈述語変数 P を含む論理式〉などというのは，どちらかというと例外的なものであります．

1.　論理式の双対

$\rightarrow$ という論理記号を含まぬ論理式 $\mathscr{A}$ に対して，$\mathscr{A}$ のなかの $\wedge$ という論理記号をすべて $\vee$ に，$\vee$ は $\wedge$ に，そうして，$\forall$ および $\exists$ はそれぞれ $\exists$ および $\forall$ にすべておきかえて得られる論理式 $\mathscr{A}^*$ のことを $\mathscr{A}$ の**双対** (dual) とよびます．要するに $\mathscr{A}$ の双対 $\mathscr{A}^*$ とは，$\mathscr{A}$ のなかの $\wedge$ と $\vee$ を入れかえ $\forall$ と $\exists$ を入れかえてできる論理式のことであります．

2.　ド・モルガンの法則の一般化

いま，述語変数 $P_1, P_2, \cdots, P_m$ を含む論理式

$$\mathscr{F}(P_1, P_2, \cdots, P_m)$$

を考えます．$P_1, P_2, \cdots, P_m$ を含むとはいっても，そのすべてを含んでいる必要はありません．しかし，ここでは，$P_1, P_2, \cdots, P_m$ 以外の述語変数や命題変数は含んでいないとしましょう．また，ここでは，〈述語変数〉という名のもとに命題変数をも代表させることにします．それは，命題というものを〈0 変数の述語〉と考えるのと同じ考えによるのであります．ですから，要するに，論理式

$$\mathscr{F}(P_1, P_2, \cdots, P_m)$$

に含まれる命題変数や述語変数は $P_1, P_2, \cdots, P_m$ のどれかになっている，ということであります．

$\mathcal{F}(P_1, P_2, \cdots, P_m)$ の双対を

$$\mathcal{F}^*(P_1, P_2, \cdots, P_m)$$

と表わします．さらには，$\mathcal{F}^*(P_1, P_2, \cdots, P_m)$ におけるすべての P_i $(i=1, 2, \cdots, m)$ を $\neg P_i$ におきかえたものを

$$\mathcal{F}^*(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_m)$$

と表わします．ここで，P_i を $\neg P_i$ におきかえるとは，$\mathcal{F}^*(P_1, \cdots, P_m)$ のなかの

$$P_i(s_1, \cdots, s_n) \qquad (n \geqq 0)$$

という形の部分を全部

$$\neg P_i(s_1, \cdots, s_n)$$

におきかえる，ということであります．

定理　論理式 $\mathcal{F}(P_1, \cdots, P_m)$ が $P_1, \cdots, P_m$ 以外の述語変数・命題変数を含まず，さらに，→ という論理記号を含まない場合，その双対を $\mathcal{F}^*(P_1, \cdots, P_m)$ と表わせば，

$$\neg \mathcal{F}(P_1, \cdots, P_m) \rightleftarrows \mathcal{F}^*(\neg P_1, \cdots, \neg P_m)$$

という論理式が証明できます（**ド・モルガンの法則の一般化**）．

この定理の実質的な内容は，任意の述語［命題を含めた意味での］

$$F_1, \cdots, F_m$$

に対して，

$$\neg \mathcal{F}(F_1, \cdots, F_m) \rightleftarrows \mathcal{F}^*(\neg F_1, \cdots, \neg F_m)$$

という形の命題が成立することを演繹法のみによって示すことができる，ということでありますが，

$$\mathcal{F}(\cdot, \cdots, \cdot) \quad と \quad \mathcal{F}^*(\cdot, \cdots, \cdot)$$

という部分の関係を簡潔に述べるために論理式という概念を用いる方が便利だったのであります．

この定理の証明は，論理式の定義の順序にしたがって順次おこなっていけばよいのです．すなわち：

2.1.　$\mathcal{F}(P_1, \cdots, P_m)$ が $P_i(t_1, \cdots, t_n)$ という形の場合（$1 \leqq i \leqq m$,

$n \geqq 0$).

$\mathscr{F}(P_1, \cdots, P_m)$ は論理記号 $\wedge$, $\vee$, $\forall$, $\exists$ を含んでいませんから[1]，その双対 $\mathscr{F}^*(P_1, \cdots, P_m)$ もまた $P_i(t_1, \cdots, t_n)$ 自身であります．でありますから，

$$\neg \mathscr{F}(P_1, \cdots, P_m) \quad \text{も} \quad \mathscr{F}^*(\neg P_1, \cdots, \neg P_m)$$

もともに $\neg P_i(t_1, \cdots, t_n)$ となり，定理が成立することは明らかです．

2.2.　$\mathscr{F}(P_1, \cdots, P_m)$ が

$$\mathscr{F}_1(P_1, \cdots, P_m) \wedge \mathscr{F}_2(P_1, \cdots, P_m)$$

という形の場合．

$\mathscr{F}_1(P_1, \cdots, P_m)$ および $\mathscr{F}_2(P_1, \cdots, P_m)$ のところまでは

(1)　$\neg \mathscr{F}_1(P_1, \cdots, P_m) \rightleftarrows \mathscr{F}_1^*(\neg P_1, \cdots, \neg P_m)$

および

(2)　$\neg \mathscr{F}_2(P_1, \cdots, P_m) \rightleftarrows \mathscr{F}_2^*(\neg P_1, \cdots, \neg P_m)$

が証明できているとします．その上で，

(3)　$\neg(\mathscr{F}_1(P_1, \cdots, P_m) \wedge \mathscr{F}_2(P_1, \cdots, P_m))$
$\rightleftarrows (\mathscr{F}_1^*(\neg P_1, \cdots, \neg P_m) \vee \mathscr{F}_2^*(\neg P_1, \cdots, \neg P_m))$

が証明できることを言えばよいのです．何となれば，

$$\mathscr{F}_1(P_1, \cdots, P_m) \wedge \mathscr{F}_2(P_1, \cdots, P_m)$$

の双対は

$$\mathscr{F}_1^*(P_1, \cdots, P_m) \vee \mathscr{F}_2^*(P_1, \cdots, P_m)$$

であるからです．

§1のド・モルガンの法則を用いれば，

$$\neg(\mathscr{F}_1(P_1, \cdots, P_m) \wedge \mathscr{F}_2(P_1, \cdots, P_m))$$
$$\rightleftarrows (\neg \mathscr{F}_1(P_1, \cdots, P_m) \vee \neg \mathscr{F}_2(P_1, \cdots, P_m))$$

が証明できることがわかります．そして，これと(1),(2)を用いますと，すぐに(3)が得られます．

---

1)　ここでは，対象式が論理記号を含んでいない，ということが用いられているのであります．もちろん，対象式とはそのようなものだと考えるのです．

2.3.　$\mathscr{F}(P_1, \cdots, P_m)$ が

$$\mathscr{F}_1(P_1, \cdots, P_m) \vee \mathscr{F}_2(P_1, \cdots, P_m)$$

という形の場合とか，または，

$$\forall x \mathscr{F}_1(x\,;\,P_1, \cdots, P_m) \quad \text{および} \quad \exists x \mathscr{F}_1(x\,;\,P_1, \cdots, P_m)$$

という形をしている場合にも，話はまったく2.2と同様にすることができます．ただし，最後の2つの場合においては，任意の自由変数 a に対して，$\mathscr{F}_1(a\,;\,P_1, \cdots, P_m)$ という形の論理式のところまでは

$$\neg \mathscr{F}_1(a\,;\,P_1, \cdots, P_m) \rightleftarrows \mathscr{F}_1{}^*(a\,;\,\neg P_1, \cdots, \neg P_m)$$

が証明できている，すなわち，

$$\forall x[\neg \mathscr{F}_1(x\,;\,P_1, \cdots, P_m) \rightleftarrows \mathscr{F}_1{}^*(x\,;\,\neg P_1, \cdots, \neg P_m)]$$

が証明できることまではわかったとして，§2 におけるド・モルガンの法則を用いればよいのです．

2.4.　最後に，$\mathscr{F}(P_1, \cdots, P_m)$ が $\neg \mathscr{F}_1(P_1, \cdots, P_m)$ という形をしている場合というのが残っていますが，この場合にも，2.2，2.3 と同じ考え方でよいのです．ただ，この場合には，もはやド・モルガンの法則を用いる必要はなく，単に

$$\neg \mathscr{F}_1(P_1, \cdots, P_m) \rightleftarrows \mathscr{F}_1{}^*(\neg P_1, \cdots, \neg P_m)$$

という仮定を1回使うだけで話が終わってしまいます．

以上の全体を通じて，第5章の §5 および §6 における置換定理がだまって使われていることは注意していただきたいと思います．

§4.　→ という論理記号に対する1つの注意

論理式 $\mathscr{A}$ の双対 $\mathscr{A}^*$ を考えるときには，$\mathscr{A}$ は → という論理記号を含まないものとしました．しかし，この制限はさほどに本質的な制限にはなっていません．なぜかというに

$$(\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}) \rightleftarrows (\neg \boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B})$$

という形の命題はつねに証明することができるので，→ を含む命題はいつでも → を含まない同値な命題に変形することができるからです．というのは，

$A \to B$ という形の部分を $\neg A \vee B$ に書きなおしておけばよいからです.

$(A \to B) \rightleftarrows (\neg A \vee B)$　**の証明**

$$\dfrac{\dfrac{\overset{(\text{排中律})}{A\vee\neg A} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{1}{A} \quad \overset{2}{A\to B}}{B}}{\neg A\vee B} \qquad \dfrac{\overset{1}{\neg A}}{\neg A\vee B}}{\neg A\vee B}\ \vee\text{-除去}\,1}{(A\to B)\to(\neg A\vee B)}\ 2$$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{5}{\neg A\vee B} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{2}{A} \quad \overset{1}{\neg B}}{A\wedge\neg B}}{A} \quad \overset{4}{\neg A}}{人}\ 1}{\neg\neg B}}{B}\ 2}{A\to B} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{3}{A} \quad \overset{4}{B}}{A\wedge B}}{B}\ 3}{A\to B}}{A\to B}\ \vee\text{-除去}\,4}{(\neg A\vee B)\to(A\to B)}\ 5$$

この $(\neg A \vee B) \to (A \to B)$ の証明は必要以上に長いものです. 常識的に奇異な感じのする推論を用いて無用の議論の種を作ることを避けたからであります. 実際には, つぎのようにすれば, それで十分なのです (第2章の§7を参照):

$$\dfrac{\dfrac{\overset{3}{\neg A\vee B} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{A} \quad \overset{2}{\neg A}}{人}}{B}\ 人に関する推論}{A\to B}\ 1 \qquad \dfrac{\overset{2}{B}}{A\to B}}{A\to B}\ 2}{(\neg A\vee B)\to(A\to B)}\ 3\,.$$

§ 5.　双対の原理

双対の原理 (principle of duality) というものを表現するにはいろいろな形式がありますが, ここでは, つぎの定理1を基礎におきましょう.

定理 1.　$\mathscr{A}$ が論理記号 $\to$ を含まぬ論理式であるとき, $\mathscr{A}$ の双対を $\mathscr{A}^*$ と表わせば, つぎの I), II) が成立します:

I)　$\mathscr{A}$ が証明できれば, $\neg\mathscr{A}^*$ も証明できる.

II)　$\neg\mathscr{A}$ が証明できれば, $\mathscr{A}^*$ も証明できる.

証明　$\mathscr{A}$ に含まれる命題変数・述語変数のすべてを

$$P_1, \cdots, P_m$$

として，$\mathscr{A}$ および $\mathscr{A}^*$ をそれぞれ

$$\mathscr{F}(P_1, \cdots, P_m) \quad \text{および} \quad \mathscr{F}^*(P_1, \cdots, P_m)$$

と表わしておきます．

I）まず，$\mathscr{A}^*$ の双対が $\mathscr{A}$ である，ということに注意をすれば，ド・モルガンの法則の一般化（§3の2）によって，

$$\neg\mathscr{F}^*(P_1, \cdots, P_m) \rightleftarrows \mathscr{F}(\neg P_1, \cdots, \neg P_m)$$

すなわち

$$(\sharp) \qquad \neg\mathscr{A}^* \rightleftarrows \mathscr{F}(\neg P_1, \cdots, \neg P_m)$$

が証明できることがわかることに注意します．いま，$\mathscr{A}$ が証明できるとします．そうすると，$\mathscr{F}(\neg P_1, \cdots, \neg P_m)$ も証明できます．何となれば，$\mathscr{A}$ の証明の全体を通じて $P_1, \cdots, P_m$ の代わりに $\neg P_1, \cdots, \neg P_m$ を用いれば，それで $\mathscr{F}(\neg P_1, \cdots, \neg P_m)$ の証明が得られるからです．そしてそのことと（♯）によって，$\neg\mathscr{A}^*$ が証明できることがわかります．

II）$\neg\mathscr{A}$ の双対は $\neg\mathscr{A}^*$ です．ですから，I）によれば，もし $\neg\mathscr{A}$ が証明できれば $\neg\neg\mathscr{A}^*$ を証明できます．さらに2重否定の法則によれば，$\mathscr{A}^*$ が証明できることがわかります（証明終わり）．

例1． A を命題変数としたとき，排中律

$$A \vee \neg A$$

の双対は $A \wedge \neg A$ であります．排中律はもちろん証明できますから，定理1のI）によって

$$\neg(A \wedge \neg A) \qquad \text{[矛盾律]}$$

も証明できることがわかります．

定理2． $\mathscr{A}$ および $\mathscr{B}$ が論理記号 $\to$ を含まぬ論理式で，それらの双対をそれぞれ $\mathscr{A}^*$ および $\mathscr{B}^*$ とするとき，もし $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ が証明できれば，$\mathscr{B}^* \to \mathscr{A}^*$ も証明できます．

証明　論理式 $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ が証明できれば，$\neg\mathscr{A} \vee \mathscr{B}$ も証明できます（§4）．$\neg\mathscr{A} \vee \mathscr{B}$ の双対は $\neg\mathscr{A}^* \wedge \mathscr{B}^*$ でありますから，定理1のI）によって

$$\neg(\neg\mathcal{A}^* \wedge \mathcal{B}^*)$$

が証明できます．ところがこの論理式は，ド・モルガンの法則によって，

$$\neg\neg\mathcal{A}^* \vee \neg\mathcal{B}^*$$

と同値であり，さらに順次

$$\mathcal{A}^* \vee \neg\mathcal{B}^*, \quad \neg\mathcal{B}^* \vee \mathcal{A}^*, \quad \mathcal{B}^* \to \mathcal{A}^*$$

と変形して行くことによって，$\mathcal{B}^* \to \mathcal{A}^*$ と同値になります．よって，論理式 $\mathcal{B}^* \to \mathcal{A}^*$ が証明できることがわかります（証明終わり）．

この定理2のために，$\mathcal{B}^* \to \mathcal{A}^*$ のことを $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ の**双対**とよぶことがあります．

例 2.　$A \wedge B \to A$ は $A \to A \vee B$ の双対です．

例 3.　F, G を述語変数とするとき，

$$\forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \vee \forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) \to \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \vee \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}))$$

という論理式と

$$\exists \boldsymbol{x}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})) \to \exists \boldsymbol{x}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \wedge \exists \boldsymbol{x}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})$$

という論理式とは互いに他の双対になっています．ですから，これらを証明するためには，その一方だけを証明しておけば十分です．

$\exists x(F(x) \wedge G(x)) \to \exists xF(x) \wedge \exists xG(x)$　**の証明**

$$\dfrac{\dfrac{\overset{2}{\exists x(F(x)\wedge G(x))} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{F(a)\wedge G(a)}}{F(a)}}{\exists xF(x)} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{1}{F(a)\wedge G(a)}}{G(a)}}{\exists xG(x)}}{\exists xF(x)\wedge\exists xG(x)}}{\exists xF(x)\wedge\exists xG(x)}\ \exists\text{-除去}\,1}{\exists x(F(x)\wedge G(x))\to\exists xF(x)\wedge\exists xG(x)}\ 2$$

定理 3.　$\mathcal{A}$ および $\mathcal{B}$ が論理記号 $\to$ を含まぬ論理式で，それらの双対をそれぞれ $\mathcal{A}^*$ および $\mathcal{B}^*$ とするとき，もし $\mathcal{A} \rightleftarrows \mathcal{B}$ が証明できれば，$\mathcal{A}^* \rightleftarrows \mathcal{B}^*$ も証明できます．

証明　$\mathcal{A} \rightleftarrows \mathcal{B}$ が証明できれば，

$$\mathcal{A} \to \mathcal{B} \quad も \quad \mathcal{B} \to \mathcal{A}$$

も証明できます．定理2によれば，そのことから

$$\mathcal{B}^* \to \mathcal{A}^* \quad および \quad \mathcal{A}^* \to \mathcal{B}^*$$

が証明できることがわかり，$\mathscr{A}^* \rightleftarrows \mathscr{B}^*$ が証明できるということになります(証明終わり).

この定理3のために，$\mathscr{A}^* \rightleftarrows \mathscr{B}^*$ のことを $\mathscr{A} \rightleftarrows \mathscr{B}$ の**双対**ということがあります．また，この定理3の応用はつぎの第7章にたくさん出てきますので，ここで例を挙げる必要はないと思います．

以上の定理1・定理2・定理3はいずれも**双対の原理**という名でよばれているものです．

第７章　いろいろな同値式

§１．　命題論理における同値式

1.　ベキ等律（冪等律）

$$A \wedge A \rightleftarrows A \qquad A \vee A \rightleftarrows A$$

証明

$$\frac{\dfrac{\overset{1}{A \wedge A}}{A}}{A \wedge A \to A}\,1 \qquad\qquad \frac{\dfrac{\overset{1}{A}\quad \overset{1}{A}}{A \wedge A}}{A \to A \wedge A}\,1$$

以上によって $A \wedge A \rightleftarrows A$ の証明は終わります．

$A \vee A \rightleftarrows A$ は $A \wedge A \rightleftarrows A$ の双対でありますから，証明するまでもありません（第６章，§５，定理３）．

2.　交換律

$$A \wedge B \rightleftarrows B \wedge A \qquad A \vee B \rightleftarrows B \vee A$$

証明

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{A \wedge B}}{B}\qquad\dfrac{\overset{1}{A \wedge B}}{A}}{B \wedge A}}{A \wedge B \to B \wedge A}\,1$$

以上で A と B を入れかえて $B \wedge A \to A \wedge B$ が得られ，$A \wedge B \rightleftarrows B \wedge A$ の証明が終わります．

$A \vee B \rightleftarrows B \vee A$ は $A \wedge B \rightleftarrows B \wedge A$ の双対であります．

例１．　$(A \rightleftarrows B) \rightleftarrows (B \rightleftarrows A)$．

証明　$A \rightleftarrows B$ とは

$$(A \to B) \wedge (B \to A)$$

のことでありますから，これは

$$[(A \to B) \wedge (B \to A)] \rightleftarrows [(B \to A) \wedge (A \to B)]$$

という$\wedge$の交換律にほかなりません．

3.　**結合律**

$$A \wedge (B \wedge C) \rightleftarrows (A \wedge B) \wedge C$$

$$A \vee (B \vee C) \rightleftarrows (A \vee B) \vee C$$

証明

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{A\wedge(B\wedge C)}}{A} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{1}{A\wedge(B\wedge C)}}{B\wedge C}}{B}}{A\wedge B} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{1}{A\wedge(B\wedge C)}}{B\wedge C}}{C}}{(A\wedge B)\wedge C}}{A\wedge(B\wedge C)\to(A\wedge B)\wedge C}\,1$$

これで

$$A \wedge (B \wedge C) \to (A \wedge B) \wedge C$$

が証明されたわけですが，ここに現われている4つの $\wedge$ のおのおのについて交換法則を適用すると，

$$(C \wedge B) \wedge A \to C \wedge (B \wedge A)$$

となり，さらに A と C とを入れかえれば

$$(A \wedge B) \wedge C \to A \wedge (B \wedge C)$$

が得られます．よって，$\wedge$ に関する結合律

$$A \wedge (B \wedge C) \rightleftarrows (A \wedge B) \wedge C$$

の証明が完結したことになります．

$\vee$に関する結合律は$\wedge$に関する結合律の双対です（証明終わり）．

問 1.　$(A \wedge B) \wedge C \to A \wedge (B \wedge C)$

を，交換律を用いることなく，直接に証明すること．

結合律のおかげで，われわれは，

$$A \wedge (B \wedge C) \quad \text{および} \quad (A \wedge B) \wedge C$$

のいずれをも代表するものとして，カッコを用いない

$$A \wedge B \wedge C$$

という表記法を用いることができます．しかも，交換律によれば，この A, B, C をいかに交換しても差しつかえないのです． さらには，数に対する〈足し算〉や〈掛け算〉の場合と同じように，4つ以上の命題についても

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n$$

というような記法を用いることができ，これにカッコをどうつけても，また $A_1, A_2, \cdots, A_n$ の順序をどう交換しても， みな同じ意味になることがわかります．そしてこのことは，$\vee$ に関する

$$A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n$$

という表記法についても，まったく同様であります．

ただし，以上はすべて，第5章の §5 および §6 における〈置換定理〉の適用範囲内での話であることはいうまでもありません．

例 2.　$$[A \to (B \vee C)] \rightleftarrows [(A \to B) \vee C]$$

という式は

$$[\neg A \vee (B \vee C)] \rightleftarrows [(\neg A \vee B) \vee C]$$

と変形してみれば（第6章の §4），これも一種の結合律となります．

問 2.　$[A \to (B \vee C)] \rightleftarrows [(A \to B) \vee (A \to C)]$.

問 3.　$[(A \wedge B) \to C] \rightleftarrows [(A \to C) \vee (B \to C)]$.

問 4.　$[\boldsymbol{A} \to (\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C})] \rightleftarrows [(\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}) \to \boldsymbol{C}]$.

4.　分配律

$$\boldsymbol{A} \wedge (\boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{C}) \rightleftarrows (\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}) \vee (\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{C})$$

$$\boldsymbol{A} \vee (\boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{C}) \rightleftarrows (\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}) \wedge (\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{C})$$

証明

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{2}{A\wedge(B\vee C)}}{B\vee C} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{2}{A\wedge(B\vee C)}}{A} \quad \overset{1}{B}}{A\wedge B}}{(A\wedge B)\vee(A\wedge C)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{2}{A\wedge(B\vee C)}}{A} \quad \overset{1}{C}}{A\wedge C}}{(A\wedge B)\vee(A\wedge C)}}{(A\wedge B)\vee(A\wedge C)}\,1}{A\wedge(B\vee C)\to(A\wedge B)\vee(A\wedge C)}\,2$$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{2}{(A\wedge B)\vee(A\wedge C)} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{1}{A\wedge B}}{A} \quad \dfrac{\dfrac{\overset{1}{A\wedge B}}{B}}{B\vee C}}{A\wedge(B\vee C)} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{1}{A\wedge C}}{A} \quad \dfrac{\dfrac{\overset{1}{A\wedge C}}{C}}{B\vee C}}{A\wedge(B\vee C)}}{A\wedge(B\vee C)}\,1}{(A\wedge B)\vee(A\wedge C)\to A\wedge(B\vee C)}\,2$$

以上によって，

$$A\wedge(B\vee C)\rightleftarrows(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$$

という分配律の証明が得られたわけです．そして，もう1つの分配律は，これの双対であります（証明終わり）．

例3.　交換律を用いれば，上に述べました分配律から，

$$(A\vee B)\wedge C\rightleftarrows(A\wedge C)\vee(B\wedge C)$$

$$(A\wedge B)\vee C\rightleftarrows(A\vee C)\wedge(B\vee C)$$

という形の分配律がなり立つこともすぐにわかります．

例4.　$[A\to(B\wedge C)]\rightleftarrows[(A\to B)\wedge(A\to C)]$.

証明　　$[\neg A\vee(B\wedge C)]\rightleftarrows[(\neg A\vee B)\wedge(\neg A\vee C)]$

と変形すれば，分配律そのものになります．

問5.　$[(A\vee B)\to C]\rightleftarrows[(A\to C)\wedge(B\to C)]$.

問6.　$[(A\to B)\to C]\rightleftarrows[(\neg A\to C)\wedge(B\to C)]$.

5.　　$(\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B})\rightleftarrows(\neg\boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{B})$

この公式はすでに前に述べたものでありますし（第6章，§4），その後も何回か用いてきたものです．

例5.　$(\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B})\rightleftarrows(\neg\boldsymbol{B}\to\neg\boldsymbol{A})$.

$\neg B\to\neg A$ のことを $A\to B$ の**対偶**とよびます．これは，対偶がもとの命題と同値であるということであります．

証明　$\neg B\to\neg A$ に対して上記の公式を適用しますと

$$(\neg B\to\neg A)\rightleftarrows(\neg\neg B\vee\neg A).$$

この式の右辺に2重否定の法則と $\vee$ に関する交換律を用いると

$$(\neg B\to\neg A)\rightleftarrows(\neg A\vee B)$$

となります．すなわち：

$$(\neg B\to\neg A)\rightleftarrows(A\to B).$$

問 7.　$(\neg A\to B)\rightleftarrows(A\vee B)$.

問 8.　$(A\to\neg B)\rightleftarrows(B\to\neg A)$.

問 9.　$(\neg A\to B)\rightleftarrows(\neg B\to A)$.

注意　$B\to\neg A$ も $\neg B\to A$ もともに，それぞれ $A\to\neg B$ ならびに $\neg A\to B$ の **対偶**といいます．2重否定と肯定との差を無視すれば，すべて例5に述べた対偶と同じことになります．同様な意味で，$B\to A$ のことをも $\neg A\to\neg B$ の対偶とよびます．

問 10.　$(A\to\neg A)\rightleftarrows\neg A$.

問 11.　$(\neg A\to A)\rightleftarrows A$.

6.　**2重否定**ならびに**ド・モルガンの法則**

$$\neg\neg\boldsymbol{A}\rightleftarrows\boldsymbol{A}$$

$$\begin{cases}\neg(\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B})\rightleftarrows\neg\boldsymbol{A}\vee\neg\boldsymbol{B}\\ \neg(\boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{B})\rightleftarrows\neg\boldsymbol{A}\wedge\neg\boldsymbol{B}\end{cases}$$

これらはすでに何回となく用いてきたものであります．念のため，一応ここに並記しておきました．

問 12.　$\neg(A\to B)\rightleftarrows(A\wedge\neg B)$.

§ 2.　Y と 人 とに関する同値式

1.　$\boldsymbol{A}\wedge\neg\boldsymbol{A}\rightleftarrows\text{人}$　　［矛盾律］

証明　$\text{人}\to A\wedge\neg A$ は〈人（矛盾）に関する推論規則〉により明らかであります（第2章，§7）．$A\wedge\neg A\to\text{人}$ の証明も同様にほとんど明らかではありましょうが，念のために証明を記しておけばつぎのようになります：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{A\wedge\neg A}}{A}\qquad\dfrac{\overset{1}{A\wedge\neg A}}{\neg A}}{\text{人}}}{A\wedge\neg A\to\text{人}}\,1$$

2.　これまでは，Y という記号は，命題または論理式としては用いてきませんでした．それは単に〈真理値〉の1つとしてのみ用いてきたように思います（第3章，第4章）．しかし，これからは，¬人 という命題のことをも Y という記号で表わすことにしましょう：

¬人 のことを Y という記号で表わす．

このようにして定義された Y は**正しい命題**を表わす記号となります．くわしくは，正しい命題のうちの1つ，または，正しい命題の代表というべきかも知れません．このことは，Y の定義からただちに了解されることでもありましょうし，つぎの2.1によっても，さらには後の7.3にいたれば，その意味は明瞭になると思います．

2.1.　Y という命題は成立します．くわしくは，われわれは Y という命題を証明することができるということです．

このことはすでに第3章の §0 でも述べましたが，ここでもう1度くりかえしておきますと，つぎのようになります：

$$\frac{\overset{1}{人}}{\neg 人}\ \neg\text{の導入}\ 1.$$

2.2.　　　¬人 ⇄ Y　　¬Y ⇄ 人

証明　¬人 ⇄ Y が成立することは Y の定義から明らかであります．また ¬Y ⇄ 人 も Y の定義によれば ¬¬人 ⇄ 人 となり，これは2重否定の法則の特殊な場合です．

3.　　　$A \vee \neg A$ ⇄ Y　　　［**排中律**］

証明　　矛盾律　$A \wedge \neg A$ ⇄ 人 の両辺の否定をとれば

$$\neg(A \wedge \neg A) \rightleftarrows \neg 人$$

となりますが，この式の右辺 ¬人 は Y そのものであります．また，左辺をド・モルガンの法則を用いて変形しますと

$$\neg A \vee \neg\neg A$$

となりますが，さらに，2重否定の法則ならびに ∨ に関する交換律を用い

ますと

$$A \vee \neg A$$

となり，所要の式を得ることができます．

問 1.　$(\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}) \rightleftarrows$ Y.　　　**〔同一律〕**

4.　さて，私はここで

Y と 人 とは互いに他の双対になっている

という事実を指摘しておこうと思います．

しかし，まず第1に，〈Y と 人 とは互に他の双対である〉という言葉は，いまのところ，それ自身は何も意味をもっていないということに注意しましょう．なぜならば，いまのところ〈双対〉という概念は〈論理式〉に対してのみ定義されたものであり（第6章，§3），しかも，そこでいう〈論理式〉とは，第6章の §3 で定義した論理式の意に解すべきであるからです．そこで定義した論理式には，Yという記号はもちろん，人という記号すら出てこないのであります．

われわれは，Yとか人という記号を含むように論理式の概念を拡張することは容易であります．しかしここでは，第6章・§3に定義した意味での論理式の概念をそのまま保存しようと思います．そして，いささかマニアワセ的ではありますが，その範囲で Y とか 人 の問題を処置しようというのであります．

第6章の §3 で定義した論理式の範囲内でも，Y や 人 という記号を含む論理式を考えることができます．ただしその時は，Y または 人 という記号は，ある1つの命題変数 A を固定したうえで，それぞれ

$$A \vee \neg A \qquad \text{および} \qquad A \wedge \neg A$$

を表わす略記号と考えるのであります．そのように考えてもよいという理由は，この§の3および1における〈排中律〉ならびに〈矛盾律〉によるのです．そして，そのように考える限り，Y の双対は 人 であり，人 の双対はYであります．

5.　　　　Y $\wedge \boldsymbol{A} \rightleftarrows \boldsymbol{A}$　　人 $\vee \boldsymbol{A} \rightleftarrows \boldsymbol{A}$

証明　人 $\vee A \rightleftarrows A$ は Y $\wedge A \rightleftarrows A$ の双対でありますから，

$$\curlyvee \wedge A \rightleftarrows A$$

だけを証明すれば十分です．しかも

$$\curlyvee \wedge A \to A$$

はほとんど明らかですから，

$$A \to \curlyvee \wedge A$$

のみを示します：

$$\dfrac{\dfrac{\curlyvee \qquad \overset{1}{A}}{\curlyvee \wedge A}}{A \to \curlyvee \wedge A}\,1.$$

ここで，$\curlyvee$は証明可能でありますから (2.1)，これで

$$A \to \curlyvee \wedge A$$

の証明ができたわけであります（証明終わり）．

例 1.　$(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \rightleftarrows A.$

証明　分配律によって

$$(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \rightleftarrows A \vee (B \wedge \neg B).$$

矛盾律を用いれば

$$(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \rightleftarrows A \vee \curlywedge.$$

ゆえに

$$(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \rightleftarrows A.$$

問 2.　$(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) \rightleftarrows A.$

問 3.　$(A \to \curlywedge) \rightleftarrows \neg A.$

問 4.　$(\curlyvee \to A) \rightleftarrows A.$

問 5.　$A \wedge (A \vee B) \rightleftarrows A,\qquad A \vee (A \wedge B) \rightleftarrows A.$　　［吸収律］

問 6.　$(A \rightleftarrows B) \rightleftarrows [(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)].$

問 7.　$\neg(A \rightleftarrows B) \rightleftarrows (A \rightleftarrows \neg B).$

問 8.　$(A \vee B) \rightleftarrows [(A \to B) \to B].$

6.　$$\curlywedge \wedge A \rightleftarrows \curlywedge \qquad \curlyvee \vee A \rightleftarrows \curlyvee$$

証明　$\curlyvee \vee A \rightleftarrows \curlyvee$ は $\curlywedge \wedge A \rightleftarrows \curlywedge$ の双対ですから

$$\curlywedge \wedge A \rightleftarrows \curlywedge$$

のみを証明すれば十分ですが，まず，

$$\curlywedge \wedge A \to \curlywedge$$

は明らかですし（$\wedge$-除去），

$$\curlywedge \to \curlywedge \wedge A$$

もまた，$\curlywedge$に関する推論規則によれば明らかであります（証明終わり）．

例 2.　$(\curlywedge \to A) \rightleftarrows \curlyvee$．

証明　$\curlywedge \to A$ を変形すれば

$$\neg \curlywedge \vee A \qquad \text{すなわち} \qquad \curlyvee \vee A$$

となるからであります．

問 9.　$(A \to \curlyvee) \rightleftarrows \curlyvee$．

7.　$(A \rightleftarrows \curlyvee) \rightleftarrows A$　　$(A \rightleftarrows \curlywedge) \rightleftarrows \neg A$

7.1.　$(A \rightleftarrows \curlyvee) \rightleftarrows A$ **の証明**

問 9 および 問 4 によれば，

$$[(A \to \curlyvee) \wedge (\curlyvee \to A)] \rightleftarrows [\curlyvee \wedge A],$$

すなわち

$$(A \rightleftarrows \curlyvee) \rightleftarrows A$$

ということがわかります．

7.2.　$(A \rightleftarrows \curlywedge) \rightleftarrows \neg A$ **の証明**

問 3 および 例 2 によれば

$$[(A \to \curlywedge) \wedge (\curlywedge \to A)] \rightleftarrows [\neg A \wedge \curlyvee].$$

すなわち

$$(A \rightleftarrows \curlywedge) \rightleftarrows \neg A$$

ということがわかります．

7.3.　$(A \rightleftarrows \curlyvee) \rightleftarrows A$ および $(A \rightleftarrows \curlywedge) \rightleftarrows \neg A$ が証明できるという事実から，われわれはただちに，つぎの 2 つのことを結論することができます．その第 1 は，

$A \rightleftarrows \curlyvee$ が成立するということは A 自身が成立することである

ということであり，第2は

$A \rightleftarrows \curlywedge$ が成立するということは，A の否定 $\neg A$ が成立することである

ということであります．そして，これらはふたたび，$\curlyvee$ および $\curlywedge$ をもって，それぞれ〈真な命題〉および〈偽な命題〉の代表と考えてよいということの正当性を示しています．

以上の§1および§2に挙げた同値式はすべてトートロジーであります．そのことは，一般的には〈付録I〉で証明する通りではありますが，個々の同値式に関する限り，直接に$\neg$，$\rightarrow$，$\wedge$，$\vee$，$\rightleftarrows$ の〈真理表〉［第3章の§1—§5］によって確かめるのが最も簡単です．そして，もしそのことを確かめたうえでは，それが証明できるというのは，〈命題論理の完全性〉からの直接の帰結であります（付録III．なお，第4章・§7も参照）．また，以下に述べますような〈述語論理における同値式〉に関しても，同様なことが考えられないわけではないのですが，本質的にも，そしてまた実際的にも，そのような方法——**述語論理の完全性**というものを利用する方法——は問題を簡易化するためにはあまり役立ちません．結局のところ，そのような方法でも最後には実質的に演繹法を用いざるを得ないのです．さらには，〈演繹論理〉を基礎にするという本書のたてまえをも考慮して，この章における記述をすべて〈演繹法〉を中心とする形式に統一したのであります．

§3.　述語論理における同値式

1.　　$\forall x F(x) \rightleftarrows \forall y F(y)$　　$\exists x F(x) \rightleftarrows \exists y F(y)$

これらはともに，〈束縛変数〉として用いている文字を変更しても，そのようにして得られる命題はもとの命題と同値であるということを示しています．それは，いわば，

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 f(y)dy$$

という等式と同様な意味をもっています．そのことは，$\forall x F(x)$ あるいは $\exists x F(x)$ という形の命題が意味する内容にまでさかのぼってみれば当然のことでありますが，ここで重要なことは，そのような事実が正しいということではなくて，第2章に述べました演繹法によってその事実を証明することができるということ，いいかえますと，演繹法を認めさえすれば，そのことを示すのに，何も $\forall$ とか $\exists$ の内容的意味にまでさかのぼる必要がないとい

うことなのであります.

証明　∃ に関する同値式は ∀ に関する同値式の双対でありますから, ∀ に関する同値式のみを証明すれば十分です. また, $\forall x F(x) \rightleftarrows \forall y F(y)$ を証明するには

$$\forall x F(x) \to \forall y F(y) \qquad \text{と} \qquad \forall y F(y) \to \forall x F(x)$$

の双方を証明すればよいのでありますが, これらは本質的には同じことでありますから, 一方のみを証明します：

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\overset{1}{\forall x F(x)}}{F(a)}}{\forall y F(y)}\ \forall\text{-導入}}{\forall x F(x) \to \forall y F(y)}\ 1.$$

ここで, 上の〈∀-導入〉という推論に対する〈変数条件〉がみたされるためには (第2章, §5), 自由変数 a として $F(x)$ に含まれない任意の変数を用いておけば十分であります (証明終わり).

今後とも〈∀-導入〉や〈∃-除去〉での〈変数条件〉に関する配慮はつねに同様でありますから, 以後用います自由変数はいつでも〈変数条件〉をみたすように適当にえらぶものとして, このような〈ただし書き〉を一々述べないこともあります.

2.
$$\boldsymbol{\forall x \forall y F(x, y) \rightleftarrows \forall y \forall x F(x, y)}$$
$$\boldsymbol{\exists x \exists y F(x, y) \rightleftarrows \exists y \exists x F(x, y)}$$

これは, $\forall x$ と $\forall y$ あるいは $\exists x$ と $\exists y$ のような, 同種類の限定作用素を引き続いて作用させるときに, それを作用させる順序を交換しても, そうして得られる命題はもとの命題と同値である, ということを示しています. それゆえに,

$\forall x \forall y$　を　〈すべての x, y に対して……〉

$\exists x \exists y$　を　〈……という x と y が存在する〉

というように, 限定作用素の順序をそれほど重要視しない読み方をすることが許されます. あるいは,

$$\forall xy \qquad \text{とか} \qquad \exists xy$$

というように，２つの束縛変数をもつ限定作用素を新しく導入する必要はなく，これまでに用いてきた普通の限定作用素を引き続き２回作用させる

$$\forall x\forall y \qquad \text{とか} \qquad \exists x\exists y$$

によって，それらの代用をさせることができる，といったほうが，より正確であるかもしれません．

同様のことが，引き続く３つ以上の同種の限定作用素についてもいえます．

2.1.　**証明**　２つの同値式のうち，一方は他の双対でありますから，一方のみを証明すれば十分です．そして，

$$\forall x\forall yF(x,y) \rightleftarrows \forall y\forall xF(x,y)$$

を証明するとすれば

$$\forall x\forall yF(x,y) \to \forall y\forall xF(x,y), \qquad \forall y\forall xF(x,y) \to \forall x\forall yF(x,y)$$

の２つを証明することになるのですが，これらは本質的に同じことでありますから，このまた一方だけを示せばよいということになります：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\forall x\forall yF(x,y)}}{\forall yF(a,y)}}{F(a,b)}}{\forall xF(x,b)}\,\forall\text{-導入}}{\forall y\forall xF(x,y)}\,\forall\text{-導入}}{\forall x\forall yF(x,y) \to \forall y\forall xF(x,y)}\,1.$$

上の２つの ∀-導入に対する変数条件がみたされるように自由変数 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ をえらぶことはできます（証明終わり）．

2.2.　$$\forall x\exists yF(x,y) \rightleftarrows \exists y\forall xF(x,y)$$

という同値式は一般には成立しません（第１章，§7，5）．ですから，限定作用素を引き続き作用させる場合にも，それが違った種類の限定作用素の場合には，その順序に注意せねばなりません．

$$\exists y\forall xF(x,y) \to \forall x\exists yF(x,y)$$

というほうは証明できるのですが（第２章，§6，例２），逆の

$$\forall x\exists yF(x,y) \to \exists y\forall xF(x,y)$$

が証明できないのです．

3. $$\forall x(F(x)\wedge G(x)) \rightleftarrows \forall xF(x)\wedge\forall xG(x)$$
$$\exists x(F(x)\vee G(x)) \rightleftarrows \exists xF(x)\vee\exists xG(x)$$

3.1. **証明**

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\forall x(F(x)\wedge G(x))}}{F(a)\wedge G(a)}}{F(a)}}{\forall xF(x)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\forall x(F(x)\wedge G(x))}}{F(a)\wedge G(a)}}{G(a)}}{\forall xG(x)}}{\forall xF(x)\wedge\forall xG(x)}}{\forall x(F(x)\wedge G(x))\to(\forall xF(x)\wedge\forall xG(x))}\;1$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\forall xF(x)\wedge\forall xG(x)}}{\forall xF(x)}}{F(a)} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{1}{\forall xF(x)\wedge\forall xG(x)}}{\forall xG(x)}}{G(a)}}{F(a)\wedge G(a)}}{\forall x(F(x)\wedge G(x))}}{(\forall xF(x)\wedge\forall xG(x))\to\forall x(F(x)\wedge G(x))}\;1$$

以上で，

$$\forall x(F(x)\wedge G(x)) \rightleftarrows \forall xF(x)\wedge\forall xG(x)$$

の証明が終わったわけですが，もう 1 つの $\exists$ と $\vee$ に関する同値式は この双対でありますから証明するまでもありません（証明終わり）．

3.2. $$\exists x(F(x)\to G(x)) \rightleftarrows (\forall xF(x)\to\exists xG(x))$$

証明 まず，

$$\exists x(F(x)\to G(x)) \rightleftarrows \exists x(\neg F(x)\vee G(x))$$

および

$$\exists x(\neg F(x)\vee G(x)) \rightleftarrows (\exists x\neg F(x)\vee\exists xG(x))$$

に注意しますと，

$$\exists x(F(x)\to G(x)) \rightleftarrows (\exists x\neg F(x)\vee\exists xG(x))$$

が得られます．ここで，この同値式の 右辺における $\exists x\neg F(x)$ をド・モルガンの法則により $\neg\forall xF(x)$ に置きかえますと，

$$\exists x(F(x)\to G(x)) \rightleftarrows (\neg\forall xF(x)\vee\exists xG(x))$$

となり，証明が終わります．何となれば，この同値式の右辺は

$$\forall xF(x) \to \exists xG(x)$$

に同値であるからです．

3.3.　いま，変数 x の変域が有限個の対象

$$e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_n$$

からなる場合を考えますと，

$$\forall xF(x) \quad \text{は} \quad F(e_1) \wedge F(e_2) \wedge \cdots \wedge F(e_n),$$

$$\exists xF(x) \quad \text{は} \quad F(e_1) \vee F(e_2) \vee \cdots \vee F(e_n)$$

をそれぞれ意味しています．対象が無限に多くある場合についても，ある意味においては，$\forall$ は $\wedge$ の一般化，また，$\exists$ は $\vee$ の一般化と考えることができます．そして，その意味においては，$\forall$ と $\wedge$ とは同じ仲間の記号，$\exists$ と $\vee$ とも同じ仲間の記号であります．ですから，

$$\begin{cases} \forall x(F(x) \wedge G(x)) \rightleftarrows \forall xF(x) \wedge \forall xG(x) \\ \exists x(F(x) \vee G(x)) \rightleftarrows \exists xF(x) \vee \exists xG(x) \end{cases}$$

は一種の〈結合律〉と考えられます．

ところが，違う仲間の記号 $\forall$ と $\vee$ あるいは $\exists$ と $\wedge$ とを組み合わせて得られる

$$\begin{cases} \forall x(F(x) \vee G(x)) \rightleftarrows \forall xF(x) \vee \forall xG(x) \\ \exists x(F(x) \wedge G(x)) \rightleftarrows \exists xF(x) \wedge \exists xG(x) \end{cases}$$

は一般に成立しません．

$$\forall xF(x) \vee \forall xG(x) \to \forall x(F(x) \vee G(x))$$

および

$$\exists x(F(x) \wedge G(x)) \to \exists xF(x) \wedge \exists xG(x)$$

は証明できるのですが，その逆が成立しないのです．

問1.　$\forall x(F(x) \vee G(x)) \to \forall xF(x) \vee \forall xG(x)$

の成立しない例，および

$$\exists xF(x) \wedge \exists xG(x) \to \exists x(F(x) \wedge G(x))$$

の成立しない例．

問2.　$\forall xF(x) \vee \forall xG(x) \to \forall x(F(x) \vee G(x))$

および

$$\exists x(F(x) \wedge G(x)) \to \exists x F(x) \wedge \exists x G(x)$$

の証明.

問 3.　$(\exists x F(x) \to \forall x G(x)) \to \forall x(F(x) \to G(x))$.

4.　$\forall x A \rightleftarrows A$　　$\exists x A \rightleftarrows A$

4.1.　**証明**　$\forall x F(x)$ とか $\exists x F(x)$ とかいう記号は，命題 $F(x)$ が x を自由変数として含んでいないときにも用います．たとえば，

$$\cfrac{\cfrac{\overset{1}{\forall x F(x)}}{F(t)}}{\forall x F(x) \to F(t)}\,1$$

という証明は，どんな対象式 t に対しても，また，どんな命題 $F(x)$ に対しても通用します．ここで，もし $F(x)$ が x を自由変数として含まぬならば，$F(x)$ と $F(t)$ とは外見的にもまったく同一の命題を表わしています．ですから，その場合には，命題 $F(x)$ および $F(t)$ を同一の記号——たとえば A ——で表わしておくほうが意味は明瞭となります．そうすれば，上で一般的に証明された命題

$$\forall x F(x) \to F(t)$$

の特別な場合として，

$$\forall x A \to A$$

という形の命題が成立することもわかります．

ところが，

$$\cfrac{\cfrac{\overset{1}{F(a)}}{\forall x F(x)}\,\forall\text{-導入}}{F(a) \to \forall x F(x)}\,1$$

は，一般的には，証明として通用しません．なぜならば，そこで用いられている〈$\forall$-導入〉という推論に対する〈変数条件〉がみたされているとは限らないからです．というのは，その推論をおこなうときにはまだ残っている仮定 $F(a)$ に a という自由変数が含まれているかもしれないからでありま

す．しかし，もし $F(a)$ が自由変数 a を含まぬならば，いいかえると，$F(x)$ が x を含まぬならば，これは証明として通用します．したがって，$F(x)$ と $F(a)$ とが同一の命題 A を表わす場合の

$$A \to \forall x A$$

は成立するわけです．ですから，まえに述べた $\forall x A \to A$ と合わせれば

$$\forall x A \rightleftarrows A$$

が証明されたことになります．

$\exists x A \rightleftarrows A$ は $\forall x A \rightleftarrows A$ の双対でありますから，あらためて証明する必要はありません（証明終わり）．

4.2.
$$\forall x(A \wedge F(x)) \rightleftarrows A \wedge \forall x F(x)$$
$$\exists x(A \vee F(x)) \rightleftarrows A \vee \exists x F(x)$$

証明　まえの3で述べたことから，

$$\forall x(A \wedge F(x)) \rightleftarrows \forall x A \wedge \forall x F(x).$$

ここで $\forall x A \rightleftarrows A$ を用いますと，

$$\forall x(A \wedge F(x)) \rightleftarrows A \wedge \forall x F(x).$$

もう1つの同値式はこれの双対であります．

問4.　$\exists x(A \to F(x)) \rightleftarrows (A \to \exists x F(x))$.

問5.　$\exists x(F(x) \to A) \rightleftarrows (\forall x F(x) \to A)$.

5.
$$\forall x(A \to F(x)) \rightleftarrows (A \to \forall x F(x))$$

5.1.　**証明**

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{A}\qquad \dfrac{\overset{2}{\forall x(A\to F(x))}}{A\to F(a)}}{F(a)}}{\forall x F(x)}\ \forall\text{-導入}}{A\to\forall x F(x)}\ 1}{\forall x(A\to F(x))\to(A\to\forall x F(x))}\ 2$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{A} \qquad \overset{2}{A \to \forall x F(x)}}{\forall x F(x)}}{F(a)}}{A \to F(a)}\,1}{\forall x(A \to F(x))}\,\forall\text{-導入}}{(A \to \forall x F(x)) \to \forall x(A \to F(x))}\,2
$$

以上のいずれの証明においても，そこで用いた自由変数 a としては，A にも $F(x)$ にも含まれないものを使います．そうすれば，∀-導入に対する変数条件は，いずれの場合にもみたされています．

5.2.
$$\forall x(A \lor F(x)) \rightleftarrows A \lor \forall x F(x)$$
$$\exists x(A \land F(x)) \rightleftarrows A \land \exists x F(x)$$

5.21. **証明**

$$\forall x(A \lor F(x)) \rightleftarrows A \lor \forall x F(x)$$

という同値式は，それを

$$\forall x(\neg A \to F(x)) \rightleftarrows (\neg A \to \forall x F(x))$$

と変形すれば（§1，問7），上で証明した同値式に還元されます．また，もう1つの同値式は，それの双対であります．

問6. $\forall x(F(x) \to A) \rightleftarrows (\exists x F(x) \to A)$.

5.22. まえの 4.2における同値式と合わせれば，

$$\forall x(A \land F(x)) \rightleftarrows A \land \forall x F(x)$$
$$\forall x(A \lor F(x)) \rightleftarrows A \lor \forall x F(x)$$
$$\exists x(A \land F(x)) \rightleftarrows A \land \exists x F(x)$$
$$\exists x(A \lor F(x)) \rightleftarrows A \lor \exists x F(x)$$

という4種類の式が全部成立することがわかります．とくに，最初の式と最後の式は〈結合律〉の一般化と考えられますし（3.3を参照），同様な考え方からすれば，なかの2つの式は，それぞれ

$$[(A \lor B_1) \land (A \lor B_2) \land \cdots] \rightleftarrows A \lor (B_1 \land B_2 \land \cdots)$$

および

$$[(A \land B_1) \lor (A \land B_2) \lor \cdots] \rightleftarrows A \land (B_1 \lor B_2 \lor \cdots)$$

という〈分配律〉の一般化とみなすことができます．

問7.　$\forall xF(x) \vee \forall xG(x) \rightleftarrows \forall x\forall y(F(x) \vee G(y))$.

問8.　$\forall x\exists y(F(x) \to G(y)) \rightleftarrows \exists y\forall x(F(x) \to G(y))$.

6.　　$\boldsymbol{\neg\forall xF(x) \rightleftarrows \exists x\neg F(x)}$　　　$\boldsymbol{\neg\exists xF(x) \rightleftarrows \forall x\neg F(x)}$

これらはすでに何度も用いてきた**ド・モルガンの法則**でありますが，念のため，ここに付記しておきます．

問9.　$\neg\forall x(F(x) \to G(x)) \rightleftarrows \exists x(F(x) \wedge \neg G(x))$.

第8章　補　　遺

これまでのところ，話はもっぱら命題に関してのみ主眼をおいてきましたが，しかし，考えてみると，論理というものの本来は，対象について論ずることをもって目的とするはずのものです．そこで，本書を終えるに当って，対象に関しての事項を二三おぎなっておこうと思います．

§1.　＝について

$a=b$ は2変数 a, b を含む命題でありますから，等号 ＝ は2変数の述語を表わす記号です．そして，この ＝ に特有な性質は，第2章に述べました演繹の一般法則だけからではけっして導かれません．そのためには，是非とも，＝ に関する公理を追加する必要があります．

1.　**＝に関する公理**としては，通常

$$\textbf{反射律：}\qquad \boldsymbol{t=t}$$

および

$$\textbf{置換法則：}\qquad \boldsymbol{s=t\to(F(s)\to F(t))}$$

を用います．ここで，s および t は任意の対象式で，F は任意の述語を意味します．

例　$\boldsymbol{a=b\to f(a)=f(b)}$　の証明：

$$\dfrac{f(a)=f(a) \qquad \dfrac{\overset{1}{a=b} \quad a=b\to(f(a)=f(a)\to f(a)=f(b))}{f(a)=f(a)\to f(a)=f(b)}}{\dfrac{f(a)=f(b)}{a=b\to f(a)=f(b)}\;1}$$

以上の証明において，$f(a)=f(a)$ は反射律の特殊な場合ですから公理とし

て用いてよく，また

$$a=b \to (f(a)=f(a) \to f(a)=f(b))$$

も，$f(a)=f(x)$ を x の述語と考え $F(x)$ と表わせば，

$$a=b \to (F(a) \to F(b))$$

となり，これは置換法則の特殊な場合と考えられますから，やはり公理として用いることができるのです．

問 1.　$\boldsymbol{a=b \to b=a}$　**（対称律）**の証明．

問 2.　$\boldsymbol{(a=b \wedge b=c) \to a=c}$　**（推移律）**の証明．

問 3.　$F(t) \rightleftarrows \exists x(x=t \wedge F(x))$．

問 4.　$F(t) \rightleftarrows \forall x(x=t \to F(x))$．

2.　〈= に関する反射律〉はけっして1つの公理ではありません．$t=t$ という形の命題はすべて公理である，といっているのです．しかし，もし

$$\forall x(x=x)$$

という **1つの**命題を公理として採用すれば，それからすべての反射律は導かれます（∀-除去）．また，逆に，われわれが公理として採用してきた反射律を用いて，$\forall x(x=x)$ という命題を証明することもできます．それは，∀-導入を用いて，ただ

$$\frac{a=a}{\forall x(x=x)}$$

とすればよいのです．$a=a$ は仮定でなくて公理ですから，変数条件はみたされています．

以上のことから，われわれは，つぎのことをも知り得たわけです：

（1）　$t=t$ という形の命題を**すべて**公理とすること

（2）　$\forall x(x=x)$ という **1つの**命題を公理とすること

（3）　a という1つの自由変数を指定したうえで，$a=a$ という **1つの**反射律だけを公理とすること

という3つのことは，すべて同等です．もっとも，そのためには，∀ という論理記号に関する推論を本質的に利用しているわけで，命題論理の範囲内で

は，（１）と（３）とが同等だなどということはいえません．

3.　〈＝に関する置換法則〉は，もしそれを

$$\forall x \forall y\, [x=y \rightarrow (F(x) \rightarrow F(y))]$$

と表わしたとしても，**１つの**公理と考えるわけにはいきません．しいて１つの公理と考えようとすれば，

$$\forall F\, \forall x \forall y\, [x=y \rightarrow (F(x) \rightarrow F(y))]$$

とでも書くことになるのでしょうが，このような表記法は，われわれのとり扱ってきた論理の範囲を越えるものです．われわれの論理においては，限定作用素はいつでも対象についてだけ用いるので，$\forall F$のように述語に関しては用いないのです．

$\forall F$とか$\exists F$のような〈述語に関する限定作用素〉をも合わせ考える論理を**２階の述語論理**といいます．〈述語の述語〉に関する限定作用素を許す**３階の述語論理**というように，**高階の述語論理**——あるいは**型の理論**ともよばれる——というものを一般に考えることもできます．それに対して，本書の第２章に述べた範囲の論理を**１階の述語論理**とよんで，他と区別することがあります．

２階以上の高階の述語論理においては，$a=b$ を命題

$$\forall F(F(a) \rightarrow F(b))$$

として定義することさえできます．そして，このような定義を下したときには，多くの場合，＝に関する公理はもはや不要になるのです．

変数 x の変域を自然数の全体とした場合，数学的帰納法の公理というものは

$$[F(1) \wedge \forall x(F(x) \rightarrow F(x+1))] \rightarrow \forall x F(x)$$

と表わされます．１階の述語論理においては，これは無限に多くの公理であると考えねばなりません．Fという述語を１つ指定するたびに，それぞれ１つずつの相異なる公理がそれに対応することになるからです．しかし，２階の述語論理で考える場合には，数学的帰納法を

$$\forall F\{[F(1) \wedge \forall x(F(x) \rightarrow F(x+1))] \rightarrow \forall x F(x)\}$$

という１つの公理で代表させることができます．

4.　＝に関する置換法則は

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{t}\rightarrow(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{s})\rightleftarrows\boldsymbol{F}(\boldsymbol{t}))$$

と表わすほうが，あるいは自然であったかもしれません．しかし，まえに述べた形に置換法則を述べておけば，この形のものを導くことができるので，記号論理学における慣例にしたがったまでであります．

問5.　$s=t\rightarrow(F(s)\rightleftarrows F(t))$ の証明.

問6.　$s=t\rightarrow(F(s)\rightleftarrows F(t))$ を公理として，置換法則を証明すること.

$\rightleftarrows$ に関する置換定理（第5章，§5）に対しても，上とまったく同様の理由から，それを

$$(A\rightleftarrows B)\rightarrow(\mathscr{F}(A)\rightarrow\mathscr{F}(B))$$

と表わしておけば十分だったのです．ただ，あの場合には，あのように表現しておくほうが，置換定理の証明に少し便利ではありました．

5.　＝という述語を用いますと，

$F(x)$ という x が**ただ1つ**存在する

という命題を表現することができます．それには，たとえば，

$$\exists\boldsymbol{x}[\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\wedge\forall\boldsymbol{y}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y})\rightarrow\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x})]$$

とすればよろしい.

$$\forall y(F(y)\rightarrow y=x)$$

という部分は〈条件 F をみたすものは —— もし，そのようなものがあるとしても——それは x に限る〉ということを意味し，したがって，

$$F(x)\wedge\forall y(F(y)\rightarrow y=x)$$

は〈x は条件 F をみたし，逆に，F をみたすものは x に限る〉ということを意味するからです.

$\exists x[F(x)\wedge\forall y(F(y)\rightarrow y=x)]$ という命題を，われわれは通常

$$\exists!\boldsymbol{x}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$$

という記号で表わします.

$\exists!xF(x)$ という記号で表わされる命題は，いつでも上のように定義しなければならぬというわけではありません．たとえば，

$$\exists\boldsymbol{x}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\wedge\forall\boldsymbol{x}\forall\boldsymbol{y}[(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\wedge\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}))\rightarrow\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}]$$

と定義してもよいのです．それは，まえに $\exists!xF(x)$ の定義とした命題と，

この命題とは同値になるからであります（問 13）．のみならず，この第 2 の表現においては，〈**少なくとも 1 つ**存在する〉という部分

$$\exists xF(x)$$

と，〈**たかだか 1 つしか**存在しない〉という部分

$$\forall x\forall y[(F(x)\wedge F(y))\rightarrow x=y]$$

とが完全に分離されているがために，その点からくる便利さもけっして少なくはないのです．

問 7.　〈$F(x)$ という x はたかだか 1 つしか存在しない〉という命題に対する

$$\forall x\forall y[(F(x)\wedge F(y))\rightarrow x=y]$$

以外の別の表現を考えること．

問 8.　〈$F(x)$ という x は少なくとも 2 つ存在する〉という命題の表現，ならびに，その否定命題を考えること．

問 9.　つぎの 2 つの命題の表現：

（1）　$F(x)$ という x は たかだか 2 つしか存在しない．

（2）　$F(x)$ という x が ちょうど 2 つだけ存在する．

問 10.　$\exists !xF(x)\rightarrow\exists xF(x)$ の証明[1]．

問 11.　$\exists !xF(x)\rightarrow\exists x\forall y(F(y)\rightarrow y=x)$．

問 12.　$\exists x\forall y(F(y)\rightarrow y=x)\rightarrow\forall x\forall y[(F(x)\wedge F(y))\rightarrow x=y]$．

問 13.　$\exists !xF(x)\rightleftarrows\{\exists xF(x)\wedge\forall x\forall y[(F(x)\wedge F(y))\rightarrow x=y]\}$．

問 14.　$\exists x\forall y(F(y)\rightarrow y=x)\rightleftarrows\forall x\forall y[(F(x)\wedge F(y))\rightarrow x=y]$．

問 15.　$\exists !xF(x)\rightarrow[\forall x(F(x)\rightarrow G(x))\rightleftarrows\exists x(F(x)\wedge G(x))]$．

§ 2.　対象領域

自由変数や束縛変数は〈対象〉を表わすとは申しましたが，これまでのと

---

1)　ここでは，考えを確定しておくために，$\exists !xF(x)$ というのは

$$\exists x[F(x)\wedge\forall y(F(y)\rightarrow y=x)]$$

の略記号であるとしておきます．問 13 においても同様です．

ころ，対象の何たるかについてはほとんど触れませんでした．すなわち，変数の変域については何も説明しなかったのです．第1章の §9，および，その他の二三の例においてのみ，わずかにそれを指定したに過ぎませんでした．しかし，変数の変域を全然考えていないというのは，本来の姿ではありません．ここでは，論理的推論の一般形式のみを述べたがために，それを指定することができなかったのであります．記号論理を個々の具体的事例に適用する場合には，変数の変域というものは，当然，何らかの形において指定されねばならぬものなのです．変数の変域をかえれば，論理記号と変数を用いて表わされた命題の内容も当然変化するものと思わねばならぬからです．

通常は，自由変数および束縛変数はすべて1つの共通な変域をもつものとします．その共通の変域のことを**対象領域**といいます．そして**対象**とよびましたものは，要するに，その対象領域に属するもの——対象領域の〈元〉または〈要素〉——のことをいうのであったのです．

〈女〉でないものを〈男〉と考えるのは，それは対象を人間に限るからです．対象領域をもっと広く考えれば，女でないもの必ずしも男とはなりません．〈みみず〉とか〈鉛筆〉とかは女ではありませんが，さりとて男というわけでもありますまい．関数の連続・不連続も，話を関数の定義域に限っておけば簡単ですが，対象領域を明確にしておかないと，tan は連続関数か不連続関数か，などというツマラヌ話も議論の種になったりするのであります．

述語論理を具体的な問題に応用する場合には，まず対象領域を1つ指定せねばなりません．それは，明瞭に指定されている場合もあれば，暗黙に了解されているという場合もありますが，とにかく，それが指定されたうえで，はじめて $\forall x$ とか $\exists x$ という限定作用素のもつ意味が確定するのです．ですから，対象領域というものは，その都度，つねに1つ固定されているものと考えねばならぬものであります．

§ 3.　対象領域の部分領域を変域とする変数

対象領域を1つ固定した以上，あらゆる変数の変域はすべて対象領域であります．変域がすべて同じであるという意味において，われわれは**1種類の**

変数しか用いないということになります．原理的にはとにかく，実用上は，これでは不便でしようがない．たとえば，微積分での対象領域は，一応，実数の全体と考えられますが，数列を $\{a_n\}$ と表わすときの n のように，自然数を表わす変数をも用いているのが現状です．

そこで，実用的な観点から，対象領域の部分領域 D というものが与えられたとき，この D を変域とする変数をわれわれの体系に導入する方法を説明してみましょう．

1. 話が簡単なので，まず〈束縛変数〉の説明から始めます．

部分領域 D を変域とする束縛変数を

$$\xi,\ \eta,\ \zeta,\ \cdots$$

というような文字で表わすことにしておきます．そのとき，$\forall\xi F(\xi)$ とか $\exists\xi F(\xi)$ というのがどんな命題を表わすかを説明すれば，それで十分です．それは，

$$\forall\xi F(\xi) \quad は \quad \forall x(x\in D\to F(x))$$

$$\exists\xi F(\xi) \quad は \quad \exists x(x\in D\wedge F(x))$$

を意味するのです．もっとくわしくいえば，$\forall\xi F(\xi)$ というのは，ある適当な束縛変数 x を用いて $\forall x(x\in D\to F(x))$ と書かれる命題を表わす略記号であり，$\exists\xi F(\xi)$ というのも $\exists x(x\in D\wedge F(x))$ の略記号に過ぎないのです．さらに，それは，ξ という特別な変数に限らず，D を変域とする任意の束縛変数に対して同様に考えます．ですから，D を変域とする束縛変数を導入したといっても，それは略記号としてのみ導入したのであって，まったく見かけ上のことです．原理的には，何も導入したことにはなっていません．

実際問題としては，$\forall\xi F(\xi)$ という命題を考える場合，命題関数 F の定義域が D であることもあります．そのようなときには，F の定義域外の対象に対する関数値を適当に――または，任意に――与えて，定義域が対象領域の全体になるように F を拡張しておくのです．1階の述語論理においては，述語の定義域はすべて対象領域の全体でなければなりません．

2. 部分領域 D を変域とする〈自由変数〉もまた，一種の略記号であります．いま，それを

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \cdots$$

というような文字で表わすことにしておきましょう．こんどは，話はやや複雑になります．

2.1.　$n+1$ 個の仮定

$$A_1(a),\ A_2(a),\ \cdots,\ A_n(a),\ a\in D \qquad (n\geqq 0)$$

から命題 $F(a)$ が導かれるということを表わすのに，D を変域とする自由変数 α を用いて

　n 個の仮定 $A_1(\alpha), A_2(\alpha), \cdots, A_n(\alpha)$ から命題 $F(\alpha)$ が導かれる

と表現します．また，$n+2$ 個の仮定

$$A_1(a,b),\ A_2(a,b),\ \cdots,\ A_n(a,b),\ a\in D,\ b\in D$$

から命題 $F(a,b)$ が導かれるということを，D を変域とする自由変数 α, β を用いて

　n 個の仮定 $A_1(\alpha,\beta), A_2(\alpha,\beta), \cdots, A_n(\alpha,\beta)$ から命題 $F(\alpha,\beta)$ が導かれる

と表現するのです．D を変域とする自由変数をもっと数多く使用する場合にも，話はまったく同様であります．

2.2.　$F(\alpha)$ という命題が導かれたというとき，それは実質的には

$$a\in D \rightarrow F(a)$$

という命題が導かれることを意味します．ただし，この場合，a という変数は，$F(\alpha)$ を導く演繹に外見上用いられていない新しい自由変数でなければなりませんし，もし $F(\alpha)$ を導くのに仮定が用いられている場合には，その仮定に含まれている α をすべて a に置きかえて考うべきは当然のことであります．

同様に，$F(\alpha,\beta)$ という命題が導かれたというとき，それは実質的には

$$(a\in D \wedge b\in D)\rightarrow F(a,b)$$

という命題が導かれることを意味しています．

以上の話は，α とか α, β 以外に D を変域とする変数が使われている場合にも適用します．ただし，その場合には，α を a に，あるいは，α と β を a

と b に置きかえるだけであって，それ以外の変数はそのままにしておくのはもちろんのことです．

2.3.　$F(\alpha)$ を $a \in D \to F(a)$ と考えてもよいというのは，それは $F(\alpha)$ が**導かれた**というときのことです．$F(\alpha)$ を**仮定した**というときには，けっして $a \in D \to F(a)$ を仮定したなどと考えてはなりません．$F(\alpha)$ を仮定したというときには，$F(a)$ という仮定と，その他，表面上はっきりと挙げられている仮定以外に，さらに $a \in D$ という命題も暗黙に仮定されていると覚悟していなければならぬのです．しいていえば，$F(\alpha)$ を仮定するというのは，

$$a \in D \wedge F(a)$$

という命題を仮定することと，実質的には同じなのであります．

3.　つぎに，$\forall\xi$ とか $\exists\xi$ とかいう限定作用素に関する推論規則を考えてみましょう．

3.1.　**∀-導入**　それは

$$\frac{\boldsymbol{F}(\alpha)}{\forall\xi\boldsymbol{F}(\xi)}$$

と表わされますが，実質的な表現に移れば，これは

$$\frac{a \in D \to F(a)}{\forall x(x \in D \to F(x))}$$

となり，これは普通の ∀-導入そのものであります．また**変数条件**は，α は仮定のなかにも $F(\xi)$ のなかにも含まれてはいけない，と述べられます．それは，実質的表現における a に対する変数条件をいいかえたものにほかなりません．

3.2.　**∀-除去**　これは

$$\frac{\boldsymbol{t} \in \boldsymbol{D} \quad \forall\xi\boldsymbol{F}(\xi)}{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{t})}$$

という形をとります．実質的表現は

$$\frac{t \in D \quad \forall x(x \in D \to F(x))}{F(t)}$$

となりますが，それは

$$\dfrac{t \in D \qquad \dfrac{\forall x(x \in D \to F(x))}{t \in D \to F(t)}}{F(t)}$$

と考えることにより，正しい推論を表わしていることがわかります．

ここで，$\forall\xi$ の除去に関する推論を

(1)　$$\frac{\forall\xi F(\xi)}{F(t)}$$

と表わさずに，

(2)　$$\frac{t \in D \qquad \forall\xi F(\xi)}{F(t)}$$

という形に表現したのは，t を一般の対象式と考えたからであります．ですから，もし t を，D に属す対象を表わす対象式に限るならば，(2)の代わりに(1)の形の推論を用いてもよいのです．たとえば，D を変域とする自由変数 α は D に属す対象を表わす対象式でありますから，(1)の形の

$$\frac{\forall\xi F(\xi)}{F(\alpha)}$$

は正しい推論であります．もっとも，$\alpha \in D$ という命題は何らの仮定なしで導かれるものでありますから（2.1参照），(2)の形の推論を用いても結局は同じことであります．

対象領域というものを1つ指定した以上，**対象式** t というのは，t に含まれるすべての自由変数に対象領域の元をそれぞれ任意に代入したとき，t の値がつねに再び対象領域の元となるような表現のみをいうのであります．ですから，$\forall x$ の導入に関する普通の推論は，当然(1)の形をとるわけであります．

3.3.　∃-導入　これも

$$\frac{t \in D \qquad F(t)}{\exists\xi F(\xi)}$$

という形をとります．実質的な表現をすれば

$$\frac{t \in D \quad F(t)}{\exists x(x \in D \land F(x))}$$

ということになりますが，それは

$$\dfrac{\dfrac{t \in D \quad F(t)}{t \in D \land F(t)}}{\exists x(x \in D \land F(x))}$$

と考えることにより正しい推論であることがわかります．

t が D に属す対象を表わす対象式であることが明らかな場合には，$t \in D$ という

前提を明示する必要はなく，単に

$$\frac{F(t)}{\exists\xi F(\xi)}$$

と書けば十分でしょう．

3.4.　∃-除去

$$\frac{\exists\xi \boldsymbol{F}(\xi) \quad \begin{matrix}[\boldsymbol{F}(\alpha)] \\ \boldsymbol{C}\end{matrix}}{\boldsymbol{C}}$$

これも，実質的表現に移れば

$$\frac{\exists x(x\in D\wedge F(x)) \qquad \begin{matrix}[a\in D\wedge F(a)] \\ C\end{matrix}}{C}$$

となり（2.3参照），普通の ∃-除去の推論となります．**変数条件**は，α は C にも $F(\xi)$ にも含まれず，また，この推論の前提となる C を導くに要する仮定のうち，$F(\alpha)$ 以外のものすべてにも含まれてはいけない，と述べることができます．その条件を実質的表現に移して考えれば，それがちょうど自由変数 a に対する普通の変数条件になっています．

4.　このように考えてきますと，$\forall\xi$ とか $\exists\xi$ という限定作用素も，普通の限定作用素とまったく同様なとり扱いができるようにも思えます．事実，じつにツマラヌ１つの例外を除いては，つねにそうなのでありますが，やはりその例外についても心得ておかねばなりません．

その例外というのは，D が空集合のときであります．

4.1.　D が空集合である場合には，$x\in D$ という命題は，x にどんな対象を代入しても，つねに偽な命題であります．したがって，

$$\forall x(x\in D\rightarrow F(x))$$

は真な命題で，

$$\exists x(x\in D\wedge F(x))$$

は偽な命題です．すなわち，どんな述語 F に対しても，$\forall\xi F(\xi)$ はつねに真であり，$\exists\xi F(\xi)$ は偽であります．ですから，当然

$$\forall\xi F(\xi)\rightarrow\exists\xi F(\xi)$$

という命題は成立しません．ところが，同じ形式をもつ

$$\forall x F(x) \to \exists x F(x)$$

は，x が対象領域を変域とする場合には，つぎのようにして証明することができるのです：

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\overset{1}{\forall x F(x)}}{F(a)}}{\exists x F(x)}}{\forall x F(x) \to \exists x F(x)}\,1.$$

4.2.　では，いったい，$\forall \xi F(\xi) \to \exists \xi F(\xi)$ の証明として，上と同様に

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\overset{1}{\forall \xi F(\xi)}}{F(\alpha)}}{\exists \xi F(\xi)}}{\forall \xi F(\xi) \to \exists \xi F(\xi)}\,1$$

としたのでは，どこが不十分なのでしょうか？　その点をハッキリさせるためには，上の証明を，ξ とか α とかいう D を変域とする変数を用いずに，もとの形に書いてみるのが1番の近道です．そこで，それを実行してみるとつぎのようになります：

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{a \in D \qquad \cfrac{a \in D \qquad \cfrac{\overset{1}{\forall x(x \in D \to F(x))}}{a \in D \to F(a)}}{F(a)}}{a \in D \wedge F(a)}}{\exists x(x \in D \wedge F(x))}}{\forall x(x \in D \to F(x)) \to \exists x(x \in D \wedge F(x))}\,1.$$

これを見れば明らかなごとく，$\forall \xi F(\xi) \to \exists \xi F(\xi)$ を導くことはできたものの，そこにはまだ $a \in D$ という仮定が残っています．

上の演繹に続けて，∃-除去の推論

$$\cfrac{\exists x(x \in D) \qquad \begin{matrix}[a \in D] \\ \forall \xi F(\xi) \to \exists \xi F(\xi)\end{matrix}}{\forall \xi F(\xi) \to \exists \xi F(\xi)}$$

をおこなえば，たしかに $a \in D$ という仮定を消すことはできますが，こんどは，$\exists x(x \in D)$ という仮定が残ります．そして，最後に残ったこの仮定

$\exists x(x \in D)$ は，D が空でないということを意味するものであります．

4.3. D を変域とする自由変数 α を用いるときには，$\alpha \in D$ という命題はつねに仮定として使われていると考えていなければならぬのです．ただ，それをとりたてて〈仮定〉とはいわずに，暗黙のうちに用いるのでした．そして，それこそが〈Dを変域とする自由変数〉というものの実質的な効用であったのです．

$\alpha \in D$ という仮定から導かれる命題 $F(\alpha)$ のなかに，実際に α という変数が含まれていれば，われわれはつねに，$\alpha \in D$ という仮定が用いられていることを意識することができます．しかし，たとえば，演繹の途中で

$$\frac{F(\alpha) \quad F(\alpha) \to C}{C}$$

などという推論を用いて，α を含まぬ結論 C が得られたりすると，それに $\alpha \in D$ という仮定が用いられていることなど，つい忘れがちになります．じつは，それは忘れてもよろしい．もし〈Dが空でない〉ということを意味するところの

$$\exists x(x \in D)$$

が仮定として必要だということさえ忘れなければ．何となれば，そのような場合には，当然，$\alpha \in D$ 以外の仮定のなかには α は含まれてはいないのでしょうし，C のなかにも α はないのですから，$\exists$－除去の推論

$$\frac{\exists x(x \in D) \qquad \begin{matrix}[\alpha \in D] \\ C\end{matrix}}{C}$$

を用いて，$\alpha \in D$ という仮定を実質的に消し去ってしまうことができるからです．

4.4. **D が空でない**という前提のもとで，D を変域とする変数や限定作用素を，対象領域全体を変域とするものとほとんど同様に，われわれはとり扱うことができるのです．それは，上の 4.3 に述べた注意のもとで，まえの 3.1 から 3.4 までを見れば明らかなことであります．

5. 以上のことから，われわれは，〈対象領域〉についても，1つの結論

を得ることができます．

任意の集合を対象領域として指定することはできるが，ただし，それは空集合であってはならない．

そのことは，∃ の導入

$$F(t) \to \exists x F(x)$$

を見れば，はじめから明らかなことであったのです．何となれば，この t というのは任意の〈対象式〉でよいというのですから，もちろん自由変数 a でもかまわない．すなわち，

$$F(a) \to \exists x F(x)$$

も正しい．ところが，$\exists x F(x)$ は〈F をみたす**対象**が存在する〉という意味であって，けっして〈F をみたす変数が存在する〉ということではありません．してみれば，われわれは，自由変数 a によって代表される対象が少なくとも1つは存在するということを，すでに認めていたのでありました．

§4.　2つ以上の対象領域をもつ述語論理

述語論理の一般論においては，自由変数ならびに束縛変数のすべては〈対象領域〉とよばれる1つの共通な変域をもつものと考えられます．すなわち，述語論理においては，通常ただ1種類の〈対象変数〉しか考えないのであります．だからといって，2種類以上の対象変数を考えるのを絶対的に拒否しているわけではありません．そうではなくて，2種類以上の対象変数を用いる場合も，結局は，1種類の対象変数しかもたぬ述語論理に還元することができるということなのであります．

2つ以上の対象領域をもつ述語論理を考える場合には，それら個々別々の対象領域の和集合をただ1つの対象領域とする述語論理を考えればよいのです．そうすれば，もとの個々の対象領域はすべてその和集合たる対象領域の部分領域と考えられますので，§3で説明した方法によって，おのおのの部分領域を変域とする自由変数・束縛変数を導入することができるからであります．

第2章に述べました推論規則は，もちろん，ただ1種類の対象変数をもつ述語論理として説明したつもりではありましたけれど，それは，そのままの形で，何種類もの対象変数をもつ場合にも通用するのであります．ただし，そのためには，各種の対象変数の変域がすべて空でないというのが第1条件で，また

$$\forall\text{-導入}\quad \frac{F(a)}{\forall x F(x)} \qquad \exists\text{-除去}\quad \frac{\exists x F(x) \quad \begin{matrix}[F(a)]\\ C\end{matrix}}{C}$$

における a と x は，同種類の自由変数と束縛変数でなければなりません．さらに

$$\forall\text{-除去}\quad \forall x F(x) \to F(t) \qquad \exists\text{-導入}\quad F(t) \to \exists x F(x)$$

における t は，任意ではありますが，束縛変数 x の変域のなかにのみ値をとるような対象式に限らねばならぬのです．

ここに述べましたのと同様な注意のもとで，これまでに述語論理の一般論として述べてきました諸性質は，2種類以上の対象変数をもつ述語論理に対しても，そのままの形で通用いたします．たとえば，

$$\forall x F(x) \rightleftarrows \forall y F(y)$$

というのは，x と y とが同種類の束縛変数であると考えねば，一般には成立しないのでありますが，

$$\forall x \forall y F(x, y) \rightleftarrows \forall y \forall x F(x, y)$$

などは，x と y とが異なる種類の変数である場合にも，一般的に成立するのであります．

例1.　〈数列 a_n が a に収束する〉という命題は

$$\forall \varepsilon \exists m \forall n(\, n > m \to |a_n - a| < \varepsilon\,)$$

と表わされます．ここで，ε は正数を表わす変数で，m と n は自然数を表わす変数であります．

例2.　集合 E で定義された関数列 $f_n(x)$ と，やはり E で定義された関数 $f(x)$ に関する〈f_n が f に収束する〉という命題は

(1)　$$\forall x \forall \varepsilon \exists m \forall n(n > m \to |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

と表わされます．ここで，x は E を変域とする変数で，[1] ε および m, n は，例 1 におけると同様に，それぞれ，正数ならびに自然数を表わす変数です．(1) の先頭にある $\forall x$ をとり除いた命題

$$\forall\varepsilon\exists m\forall n(n>m\rightarrow|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon)$$

は，x を自由変数として含んでおり，この x を E に属す 1 つの定数と考えれば，〈数列 $f_n(x)$ が $f(x)$ に収束する〉という命題となります．

(1) の先頭にある $\forall x$ と $\forall\varepsilon$ とを交換しても同値な命題ができるはずですから（第 7 章，§3 の 2），

(2)　$$\forall\varepsilon\forall x\exists m\forall n(n>m\rightarrow|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon)$$

もまた〈f_n が f に収束する〉ということを意味します．しかし，(2) の $\forall x$ と $\exists m$ とを交換すると，それは，一般には異なった命題となります（第 1 章，§7 の 5）．事実，(2) の $\forall x$ と $\exists m$ とを交換した

(3)　$$\forall\varepsilon\exists m\forall x\forall n(n>m\rightarrow|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon)$$

は，〈(E において) f_n が f に一様に収束する〉ということを意味します．そして (3) はまた

$$\forall\varepsilon\exists m\forall n\forall x(n>m\rightarrow|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon)$$

と書いても

$$\forall\varepsilon\exists m\forall n[n>m\rightarrow\forall x(|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon)]$$

と書いても同じことであります（第 7 章，§3 の 2 および 5）．

---

1)　ですから，くわしくは，(1) は〈E において f_n が f に収束する〉ということであります．

付録Ⅰ．演繹法の無矛盾性

以下においては，命題論理の論理式でしかも演繹法によって証明される論理式は，いかなる真理値の与え方に対してもつねにⅤという真理値をもつ，ということを証明する．それは，演繹によって証明される命題論理の論理式はすべてトートロジーに限られるということを意味するから，このことからただちに，矛盾命題を表わす命題定数人は演繹によっては証明され得ないという，いわゆる〈演繹法の無矛盾性〉が導かれる（第4章，§5）．

まず§1においては，命題論理の論理式だけを用いる範囲，すなわち，∀や∃を用いない命題論理の範囲における演繹のみを考え，∀や∃に関する推論をも含む一般の場合，すなわち，いわゆる述語論理における演繹についてはは§2において述べる．

§1．命題論理の無矛盾性

ここでとり扱う論理式はすべて命題論理の論理式である．それらは，∀や∃という論理記号を含んでいない．また，各命題変数に1つずつの真理値を与える与え方が1つ固定されているとする．したがって，すべての論理式のおのおのに対して1つずつの真理値が対応している．そして，ここでは，このような論理式だけからできる演繹のみを考えるので，∀とか∃に関する推論規則を用いる余地はない．

われわれは，このような前提のもとに，つぎのようにやや一般化した形において定理を証明する．

定理　**1つも仮定をもたないか，または，仮定があるとしても，仮定として用いられている論理式の真理値がすべてⅤであるような演繹によっ**

て導かれる論理式の真理値は V である．

この定理を一般に証明し得たならば，その特別な場合として，仮定を1つもたない演繹を考えることにより，所要の結果が得られることになる．

記述を簡単にするために，

仮定として用いられている論理式の真理値が**すべて** V である

という言葉によって，〈仮定が1つもない〉という場合をも含めて表現しておくことにする．

いま，仮定として用いられている論理式の真理値がすべて V であるような演繹が1つ与えられているとして，その演繹の最終の結論として得られている論理式の真理値が V であることを示す．そしてその証明は，与えられた演繹が n 個の推論から成り立っているとして，その n に関する数学的帰納法による．

1.　$n=0$ の場合．これは，与えられた演繹において推論が1度も用いられていないということであるから，演繹の結論はすなわち演繹の仮定そのものか，または公理である．

1.1.　演繹の結論が演繹の仮定そのものである場合．仮定の真理値はVであるから，結論の真理値も当然 V となる．

1.2.　演繹の結論が公理である場合．演繹法における公理は〈排中律〉のみである．排中律とは

$$\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A}$$

という形の論理式で，$\mathcal{A}$ は任意の論理式でよいのであるが，$\mathcal{A}$ の真理値が何であっても，この真理値は V となる．

2.　$n>0$ の場合．n 個より少ない推論からなる演繹で，しかも，その仮定として用いられている論理式の真理値がすべて V であるものの結論として得られる論理式はすべて V という真理値をもつ，ということを仮定して（**帰納法の仮定**），与えられた演繹の結論たる論理式の真理値が V であることを示す．そして，そのことを示すのに，与えられた演繹の最後に用いられている推論の種類によって場合わけをして証明する．

2.1.　与えられた演繹の最後の推論が〈→-導入〉

$$\frac{\begin{matrix}[\mathcal{A}]\\ \mathcal{B}\end{matrix}}{\mathcal{A}\to\mathcal{B}}$$

である場合．与えられた演繹の結論は

$$\mathcal{A}\to\mathcal{B}$$

という論理式であるのだから，この論理式の真理値が Y であることを示せばよい．

2.11.　$\mathcal{A}$ の真理値が人である場合．真理値の定義により，$\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ の真理値は Y である．

2.12.　$\mathcal{A}$ の真理値が Y である場合．もし $\mathcal{B}$ の真理値が Y であれば，真理値の定義により，$\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ の真理値は Y となるから，$\mathcal{B}$ の真理値が Y であることを示せばよい．

いま，与えられた演繹の最後から2番目の結論 $\mathcal{B}$ にいたる演繹を考えてみるに，そこまでに用いられている推論の個数は $n-1$ であり，また，そこに用いられている仮定は与えられた演繹における仮定と $\mathcal{A}$ のみであるから，それらの真理値はすべて Y である．よって，帰納法の仮定により，$\mathcal{B}$ の真理値は Y である．

2.2.　与えられた演繹の最後の推論が〈→-除去〉

$$\frac{\mathcal{A}\quad \mathcal{A}\to\mathcal{B}}{\mathcal{B}}$$

である場合．与えられた演繹の結論は $\mathcal{B}$ である．

いま，最後の結論 $\mathcal{B}$ のすぐ上にある $\mathcal{A}$ と $\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ にいたる演繹をそれぞれ考えてみると，それらに用いられている仮定は，いずれも与えられた演繹の仮定の一部であるから，その真理値はすべて Y であり，また，そこに用いられている推論の個数はどちらも n より小さい．よって，帰納法の仮定により，$\mathcal{A}$ の真理値も $\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ の真理値も Y となる．したがって，真理値の定義により，$\mathcal{B}$ の真理値も Y．

2.3.　最後の推論が〈∧-導入〉

$$\frac{\mathcal{A} \quad \mathcal{B}}{\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}}$$

である場合．帰納法の仮定により，$\mathcal{A}$ および $\mathcal{B}$ の真理値はともに Y．よって，真理値の定義により，最後の結論 $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ の真理値も Y である．

2.4.　最後の推論が〈∧－除去〉

$$\frac{\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}}{\mathcal{A}}$$

の場合．帰納法の仮定により $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ の真理値は Y．よって $\mathcal{A}$ の真理値も Y でなければならぬ．

最後の推論が

$$\frac{\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}}{\mathcal{B}}$$

という形の〈∧－除去〉である場合もまったく同様．

2.5.　最後の推論が〈∨－導入〉

$$\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A} \vee \mathcal{B}}$$

の場合．帰納法の仮定により $\mathcal{A}$ の真理値は Y．よって $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ の真理値も Y である．

最後の推論が

$$\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A} \vee \mathcal{B}}$$

という形の〈∨－導入〉である場合もまったく同様．

2.6.　最後の推論が〈∨－除去〉

$$\frac{\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \quad \begin{matrix}[\mathcal{A}] \\ \mathcal{C}\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\mathcal{B}] \\ \mathcal{C}\end{matrix}}{\mathcal{C}}$$

の場合．帰納法の仮定により $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ の真理値は Y．よって，$\mathcal{A}$ および $\mathcal{B}$ のいずれか少なくとも一方の真理値は Y である．

2.61.　$\mathcal{A}$ の真理値が Y の場合．最後の結論である $\mathcal{C}$ のすぐ上に並んでいる 3 つの論理式

$$\mathcal{A}\vee\mathcal{B} \qquad \mathcal{C} \qquad \mathcal{C}$$

のうち，まんなかにある $\mathcal{C}$ にいたる演繹を考えてみると，それに用いられている仮定は，与えられた演繹の仮定の一部と $\mathcal{A}$ のみであるから，その真理値はすべて Y．よって，帰納法の仮定により，$\mathcal{C}$ の真理値は Y．

2.62　$\mathcal{B}$ の真理値が Y の場合．2.61 とまったく同様．

2.7.　最後の推論が〈¬-導入〉

$$\frac{\begin{matrix}[\mathcal{A}]\\ \text{人}\end{matrix}}{\neg\mathcal{A}}$$

の場合．

2.71.　$\mathcal{A}$ の真理値が 人 の場合．$\neg\mathcal{A}$ の真理値は Y．

2.72.　$\mathcal{A}$ の真理値が Y の場合．最後の結論 $\neg\mathcal{A}$ のすぐ上にある 人 にいたる演繹を考えてみると，そこにおける仮定は，与えられた仮定と $\mathcal{A}$ のみであるから，その真理値はすべて Y．それにもかかわらず，その結論は 人 であるのだから，帰納法の仮定によって，このような場合はあり得ない．

2.8.　最後の推論が〈¬-除去〉

$$\frac{\mathcal{A} \quad \neg\mathcal{A}}{\text{人}}$$

の場合．帰納法の仮定により，$\mathcal{A}$ の真理値も $\neg\mathcal{A}$ の真理値もともに Y でなければならないが，$\neg\mathcal{A}$ の真理値が Y であれば，$\mathcal{A}$ の真理値は 人 でなければならず，まえに，$\mathcal{A}$ の真理値が Y，といったことに反する．よって，このような場合は起り得ない．

2.9.　最後の推論が〈人 に関する推論〉

$$\frac{\text{人}}{\mathcal{A}}$$

の場合．最後の結論 $\mathcal{A}$ のすぐ上の 人 にいたる演繹は，仮定に用いられている論理式の真理値がすべて Y で，結論は 人 にある．しかも，そこに用いられている推論の個数が $n-1$ であるから，これは帰納法の仮定に反する．よって，このような場合は起り得ない．

以上によって，定理の証明は完全に終了した．

§2.　述語論理の無矛盾性

こんどは，∀ や ∃ をも含む一般の論理式をとり扱う．したがって，∀ や ∃ に関する推論規則をも含めた範囲での演繹を考える．このように全範囲の演繹をとり扱う論理を〈述語論理〉という．であるから，述語論理は，§1 で論じた〈命題論理〉をその一部として含んでいる．

ここでは，つぎの定理を証明する．

定理　**命題論理の論理式であって，しかも述語論理の範囲で証明できる論理式は，じつはすでに命題論理の範囲内で証明することができてしまうのである．**

まず，この定理は自明ではない．たとえば，

$$\frac{\forall x \mathscr{F}(x) \quad \forall x \mathscr{F}(x) \to \mathcal{C}}{\mathcal{C}}$$

という modus ponens を考えてみる．そして $\mathcal{C}$ が ∀ とか ∃ という論理記号を含んでいない論理式である場合を考えてみるならば，ある推論の前提となる論理式には ∀ や ∃ が含まれていても，その結論中にはもはや ∀ や ∃ が現われない，という場合があり得ることがわかるであろう．したがって，演繹の途中に ∀ や ∃ が用いられているからといって，その演繹によって導かれた論理式のなかには必ずしも ∀ や ∃ が含まれているとは限らないし，いいかえれば，命題論理の論理式を導く演繹は必ず命題論理の範囲内の演繹であると断定することはできない．

つぎに，この定理を証明すれば，述語論理の無矛盾性を示すに十分であるということは明らかであろう．命題論理の論理式であって述語論理で証明されるものは，この定理によれば，すでに命題論理の範囲で証明されねばならず，また §1 の結果によれば，そのような論理式はトートロジーでなければならぬからである．

述語論理の論理式　定理の証明にさきだって，述語論理の論理式というも

のの範囲を明確に限定しておこう．

述語論理に現われる命題の一般形式を表現するためには，任意の述語を表わす〈述語変数〉なるものが必要である．しかし，ここでは，述語変数に用いる記号としては〈命題変数〉をそのまま流用することにする．たとえば，命題変数 A を用いた

$$A(a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

という表現によって，自由変数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ を含む任意の命題を表わすことにし，

$$A(t_1, t_2, \cdots, t_n)$$

によって，その命題中の $a_1, a_2, \cdots, a_n$ のそれぞれに対象式 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ を代入して得られる命題を表わす．したがって，この場合には，命題変数 A はけっして〈命題〉そのものを表わしていない．それは〈n 変数の述語〉を表わしている．論理式中の命題変数が，命題を表わしているか述語を表わしているか，また，述語を表わしたとして，それが1変数の述語を表わしているか2変数の述語を表わしているか，というようなことは，おのおのの命題変数の使い方から場合場合に応じて自然にわかることなのである．

述語論理においても，各命題変数はそれぞれそれ自身で1つの論理式であると考えるのであるが，さらに，任意の対象式 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ ($n=1, 2, \cdots$) と任意の命題変数 A とを組み合わせて作られる

$$A(t_1, t_2, \cdots, t_n)$$

という表現をも，すべて1つずつの論理式と考える．この場合，$t_1, t_2, \cdots, t_n$ のおのおのを A の**アーギュメント** (argument) とよぶ．

以上に述べた論理式，すなわち，命題変数それ自身と，アーギュメントとして対象式をもつ命題変数，それともう1つ命題定数 人 をもとにして，それから論理記号

$$\to, \quad \wedge, \quad \vee, \quad \neg, \quad \forall, \quad \exists$$

を用いて[1)]組み立てられる論理式を，われわれは〈述語論理の論理式〉とよぶ

1) ∀や∃を用いるときには，当然，束縛対象変数をも補助的に用いることになる．

ことにする．

〈命題論理の論理式〉というのは，述語論理の論理式のうちの特殊な性質をもつものである．それは，∀や∃を含まぬ論理式であるが，さらに，アーギュメントをもつ命題変数をも含んでいないのである．

定理の証明のための1つの準備　われわれは，〈∃-除去〉という推論規則として，

$$\frac{\exists x \mathscr{F}(x) \quad \forall x(\mathscr{F}(x) \to \mathscr{C})}{\mathscr{C}}$$

という形式のものを用いることにする．これが普通の ∃-除去と同等の効力をもつものであることは，すでに第2章の §6 で注意しておいた．

推論規則をこのように変形することは，原理的には，定理の証明をけっして簡単なものにしてはいない．ただ，証明の記述を簡単にするだけである．∃-除去に関係する部分について，読者は，もとのままの推論規則で証明を考えなおしてみられるとよい．

定理の証明　まず，述語論理の論理式を変形して命題論理の論理式を作る1つの方法を考える．その方法とは，論理式中に現われる命題変数のアーギュメントを全部とり去り，さらに∀および∃という記号ならびに束縛変数を全部消してしまうのである．$\mathscr{A}$ という論理式にこの方法を適用して得られた結果を $\mathscr{A}^*$ と表わす．たとえば，$\mathscr{A}$ が

$$\forall x[(A(x,a) \vee \neg B) \to \exists z(A(z,x) \wedge C(z))]$$

であれば，$\mathscr{A}^*$ は

$$(A \vee \neg B) \to (A \wedge C)$$

を意味する．

$\mathscr{A}$ が述語論理のどんな論理式であっても，$\mathscr{A}^*$ はつねに命題論理の論理式となる．

$\mathscr{A}$ がはじめから命題論理の論理式であれば，$\mathscr{A}^*$ は $\mathscr{A}$ そのものである．すなわち，この変形とは，何もしないということである．

さて，述語論理の論理式からなる1つの演繹を考え，それは1つも仮定を

もたず，しかも最後の結論は命題論理の論理式であるとする．このとき，命題論理の論理式だけからなり，しかも1つも仮定をもたない演繹で，同じ結論を導くものの存在を示せば，定理の証明として十分である．

それには，はじめの演繹に現われる任意の論理式 $\mathscr{D}$ を全部 $\mathscr{D}^*$ に変形すればよい．

まず，この変形によって，最後の結論は何の変形をも受けない．それは，はじめから命題論理の論理式であったからである．

つぎに，この変形によって，その演繹に用いられている個々の推論や公理が，ふたたび正しい推論や公理に変形されていることを調べれば，それで十分である．ところが，∀ および ∃ に関する4種類の推論を除けば，それ以外のあらゆる推論や公理について，このことはすべて明らかである．また，∀－導入，∀－除去，∃－導入の3種類については，それらは，それぞれ

$$\frac{\mathscr{F}(a)}{\forall x\mathscr{F}(x)} \qquad \frac{\forall x\mathscr{F}(x)}{\mathscr{F}(t)} \qquad \frac{\mathscr{F}(t)}{\exists x\mathscr{F}(x)}$$

という形をしているが，

$$\mathscr{F}(a), \quad \mathscr{F}(t), \quad \forall x\mathscr{F}(x), \quad \exists x\mathscr{F}(x)$$

という論理式は変形後はどれもみな同じ形になってしまうので，これら3種の推論はすべて，前提と結論とが同一の論理式からなる，いわば〈むだな推論〉に変形されてしまう．このような〈むだな推論〉はとばして考えることにすればよいから問題にならない．残るところは，∃－除去

$$\frac{\exists x\mathscr{F}(x) \quad \forall x(\mathscr{F}(x)\to\mathcal{C})}{\mathcal{C}}$$

であるが，これは，変形後は

$$\frac{\mathscr{F}^* \quad \mathscr{F}^*\to\mathcal{C}^*}{\mathcal{C}^*}$$

という形の〈→－除去〉になるのである．

付録Ⅱ. 最小論理・直観主義論理・古典論理のおのおのが実質的に異なるということの証明

§1. 人 $\to A$ が最小論理の範囲では証明不可能であることの証明

いま，任意の命題変数 C を1つ固定し，命題定数 人 を C に置きかえ，さらに $\neg\mathcal{B}$ という形の部分を

$$\mathcal{B} \to C$$

に置きかえる．論理式 $\mathcal{A}$ から出発し，この置きかえをでき得る限りおこなって得られた結果を $\mathcal{A}^*$ と表わせば，$\mathcal{A}^*$ はもはや 人 や $\neg$ を含まない論理式となる．もし $\mathcal{A}$ が 人 や $\neg$ を1つも含まない場合には，$\mathcal{A}^*$ は $\mathcal{A}$ 自身を意味するものとしておく．

$\neg$ - 導入： $\dfrac{\begin{matrix}[\mathcal{A}]\\ 人\end{matrix}}{\neg\mathcal{A}}$ 　　$\neg$ - 除去： $\dfrac{\mathcal{A} \quad \neg\mathcal{A}}{人}$

という推論は，この置きかえによって，それぞれ

$$\frac{\begin{matrix}[\mathcal{A}^*]\\ C\end{matrix}}{\mathcal{A}^* \to C} \qquad \frac{\mathcal{A}^* \quad \mathcal{A}^* \to C}{C}$$

という〈$\to$ - 導入〉および〈$\to$ - 除去〉に変わるほか，$\neg$ 以外の論理記号に関する推論は，それぞれ，もとの推論と同種類の推論になるので，結局，この置きかえによって，正しい推論からは再び正しい推論が得られるだけである．ただし，

人 に関する推論： $\dfrac{人}{\mathcal{A}}$

および

排中律： $\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A}$

の2つは例外であるが，これらは最小論理には用いられないから，問題外と

してよい．

以上によって，われわれはつぎの結論を得ることができる：

論理式 $\mathcal{A}$ が最小論理で証明され得るならば，$\mathcal{A}^*$ もまた［最小論理の範囲で］証明することができる．したがって，$\mathcal{A}$ が命題論理の論理式であることをさらに仮定すれば，$\mathcal{A}^*$ はトートロジーであるということになる．

A を命題変数とし，

$$人 \to A$$

という論理式を $\mathcal{A}$ と考えれば $\mathcal{A}^*$ は

$$C \to A$$

である．C として A と異なる命題変数を選んでおけば，この $C \to A$ はトートロジーでない．よって，最小論理の範囲内で 人 $\to A$ を証明することはできない．

ここで証明したことは，

$$人 \to \mathcal{A}$$

という形の論理式が，最小論理の範囲では，**一般には**証明し得ないということであって，**つねに**証明し得ないということとは違う．$\mathcal{A}$ として適当な論理式をとりさえすれば，人 $\to \mathcal{A}$ が証明できることはいくらでもあり得る．たとえば，$\mathcal{A}$ として命題定数 人 を用いた 人 $\to$ 人 はもちろん最小論理の範囲でも証明することができる．

排中律との関係　命題変数 A に対しての

$$人 \to A$$

は，じつは，排中律を用いてもなおかつ証明することはできない．そのことを示すには，命題変数 C の代わりに証明可能な論理式 $\mathcal{T}$ を用いて上述の議論をくり返せばよろしい．［$\mathcal{T}$ としては，たとえば $A \to A$ を採用することができる．］何となれば，まず $\mathcal{T}$ がトートロジーとなることに注意すれば，この場合も，人 $\to A$ を変形して得られる

$$\mathcal{T} \to A$$

はトートロジーにはならないが，排中律 $\mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}$ を変形して得られる

$$\mathcal{A}^* \vee (\mathcal{A}^* \to \mathcal{T})$$

は証明可能な論理式となるからである．

§ 2.　排中律が直観主義論理の範囲では証明不可能であることの証明

ここでもまた，A を命題変数として，

$$A \vee \neg A$$

という論理式が直観主義論理の範囲では証明し得ないということを示す．

まず，命題論理の論理式であってしかも直観主義の述語論理で証明できるものは，じつは直観主義の命題論理の範囲内ですでに証明し得る，という事実に注意する．このことは，付録 I の §2 における定理の証明を，論理の範囲を直観主義論理に限定して読みなおすことによって，直接に知ることができる．そこで今後は，考察の範囲を**直観主義の命題論理**に限っておく．というのは，$A \vee \neg A$ がすでに命題論理の論理式である以上，このように範囲を限って考えても，なんら一般性を失うことがないからである．

いままでは，論理式の真理値として ⋎ ならびに ⋏ の 2 つだけを考えてきた．ここではそれを少しく拡張し，論理式に与える真理値として

⋎,　𝔵,　⋏

という 3 つのものを考える．まず，各命題変数のおのおのには，この 3 つのうちの 1 つずつをそれぞれ任意に対応させ，それ以外の論理式の真理値は，つぎの各真理表の指示にしたがって定義するものとする．

$\mathcal{A} \to \mathcal{B}$

$\mathcal{A}$ \ $\mathcal{B}$	⋎	𝔵	⋏
⋎	⋎	𝔵	⋏
𝔵	⋎	⋎	⋏
⋏	⋎	⋎	⋎

$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$

$\mathcal{A}$ \ $\mathcal{B}$	⋎	𝔵	⋏
⋎	⋎	𝔵	⋏
𝔵	𝔵	𝔵	⋏
⋏	⋏	⋏	⋏

$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$

$\mathcal{A}$ \ $\mathcal{B}$	⋎	𝔵	⋏
⋎	⋎	⋎	⋎
𝔵	⋎	𝔵	𝔵
⋏	⋎	𝔵	⋏

$\mathcal{A}$	$\neg\mathcal{A}$
⋎	⋏
𝔵	⋏
⋏	⋎

これによって，各命題変数の真理値を定めれば，命題論理の論理式の真理値

がすべて1つずつ定まる．

真理表の読み方　たとえば，$\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ の真理表についていえば：　$\mathcal{A}$ の真理値が Y のときは，　$\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ の真理値は　$\mathcal{B}$ の真理値と同じ；$\mathcal{A}$ の真理値が $\mathfrak{X}$ のときの $\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ の真理値は，$\mathcal{B}$ の真理値が 人 ならば 人 で，それ以外の場合には Y；$\mathcal{A}$の真理値が 人のときは，$\mathcal{B}$ の真理値のいかんにかかわらず $\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ の真理値はつねにY．その他の真理表についても，これと同様である．

いま，命題変数 A の真理値を $\mathfrak{X}$ として $A\vee\neg A$ の真理値を計算してみると，それもまた $\mathfrak{X}$ となる：

A	$\neg A$	$A\vee\neg A$
$\mathfrak{X}$	人	$\mathfrak{X}$

よって，$A\vee\neg A$ が直観主義の命題論理で証明不可能であるということを示すには，つぎの定理を証明すれば十分である．

定理　直観主義の命題論理で証明される論理式の真理値は，命題変数にどんな真理値を与えてもつねに Y となる[1)]．

以下，この定理の証明を述べる．

補助定理 1．　直観主義の命題論理における演繹で，そこに 人 という真理値をもつ仮定が1つも用いられていなければ，その演繹の最後の結論として導かれた論理式の真理値は人ではない．

証明　この§で与えた真理表で $\mathfrak{X}$ を Y と同一視すれば，第3章に述べた普通の真理表が得られるから，この補助定理は付録 I の §1における定理よりの直接の結論と考えられる．それを，ややくわしく述べれば，つぎのようになる：

命題変数に与えられた真理値のうち $\mathfrak{X}$ を Y に変えることによって起る論理式の真理値の変化は，$\mathfrak{X}$ という真理値をもつ論理式の真理値がすべて Yとなるということだけである．そして，そのようにして得られる論理式の真理

1)　じつは，すべての命題変数に真理値 $\mathfrak{X}$ を与えた場合だけを証明すれば十分であるし，また，1つの命題変数 Aだけを含む論理式のみを考えれば十分なのであるが，証明の手続きはまったく同じであるので，このような一般的な定理を述べておく．

値を命題変数の真理値から計算する方法は普通の真理値の計算法そのものである．もし，真理値 人 をもつ仮定を1つも用いない演繹によって真理値 人 をもつ論理式を導くことができたとすれば，そこにおいて真理値 𝔵 を Y に置きかえることにより，仮定の真理値がすべて Y である演繹——または，1つも仮定をもたない演繹—— によって真理値 人 の論理式が導かれることになる．しかし，付録 I の §1における定理によれば，このようなことはあり得ない（証明終わり）．

この補助定理の証明において，演繹が〈直観主義論理〉に属するものであるという性質はいっさい用いなかった．したがってこれは，直観主義論理のみならず，一般に古典命題論理に対してすでに成立している定理なのである．

補助定理 2.　直観主義の命題論理における演繹で，仮定があるとしても，その仮定がすべて Y という真理値をもつ論理式であるならば，その演繹の最後の結論として導かれる論理式の真理値は Y である．

この補助定理2が示されれば，この§における最終目的であるところの定理の証明も，その特別な場合として得られたことになる．

この補助定理2が〈直観主義の論理〉の範囲に限られた話であるということ，および，ここでいう真理値というものがこの§に述べられた特殊な真理表によって定義されたものであるということを除けば，これは付録 I の §1における定理とまったく同じである．したがって，その証明も，ほとんど同様な手続きによって行なうことができる．

補助定理 2 の証明　いま，直観主義の命題論理における演繹で，仮定の真理値がすべて Y であるもの——または，仮定を1つももたないもの——が与えられているとし，その演繹の最後の結論の真理値が Y であることを，その演繹に用いられている推論の個数 n に関する数学的帰納法によって証明する．

1.　$n=0$ の場合．演繹法の公理は排中律のみで，それは直観主義論理では用いないから，演繹の結論は演繹の仮定そのものである．よって，補助定理2の主張は正しい．

2. $n>0$ の場合．演繹の最後に用いられている推論の種類によって，さらに場合わけをする．

2.1. →-導入

$$\frac{\begin{matrix}[\mathcal{A}]\\ \mathcal{B}\end{matrix}}{\mathcal{A}\rightarrow\mathcal{B}}$$

の場合．

2.11. $\mathcal{A}$ の真理値が ⅄ の場合．$\mathcal{A}\rightarrow\mathcal{B}$ の真理値は Y.

2.12. $\mathcal{A}$ の真理値が 𝔛 の場合．補助定理 1 によって，$\mathcal{B}$ の真理値は Y または 𝔛 である．よって，$\mathcal{A}\rightarrow\mathcal{B}$ の真理値は Y.

2.13. $\mathcal{A}$ の真理値が Y の場合．帰納法の仮定により，$\mathcal{B}$ の真理値は Y. よって，$\mathcal{A}\rightarrow\mathcal{B}$ の真理値も Y.

2.2. ¬-導入

$$\frac{\begin{matrix}[\mathcal{A}]\\ \curlywedge\end{matrix}}{\neg\mathcal{A}}$$

の場合．補助定理 1 によって，$\mathcal{A}$ の真理値は ⅄ でなければならぬ．よって，$\neg\mathcal{A}$ の真理値は Y.

2.3. その他の場合は，すべて付録 I の §1 の定理の証明におけるのとまったく同様．

付録III.　命題論理の完全性

ここでは命題論理だけを問題にするから，単に論理式といえば，それは命題論理の論理式のことである．

〈命題論理の完全性〉というのは，普通には，以下に述べる定理 2 の内容を意味する．定理 1 はそのための補助定理ではあるが，それ自身もまた命題論理のある意味における完全性を主張しているものである．

定理 1.　論理式 C は $m+n$ 個の命題変数

$$A_1,\ \cdots,\ A_m,\ B_1,\ \cdots,\ B_n$$

以外の命題変数を含まぬものとする（$m,\ n\geqq 0$）．いま，$A_1,\ \cdots,\ A_m$ に真理値 $\curlyvee$ を，$B_1,\ \cdots,\ B_n$ に真理値 $\curlywedge$ を与えれば C の真理値は定まるが，C の真理値が $\curlyvee$ であるか $\curlywedge$ であるかに応じて，

$$(*)\qquad A_1,\ \cdots,\ A_m,\ \neg B_1,\ \cdots,\ \neg B_n$$

という仮定のもとで，それぞれ，C あるいは $\neg C$ を演繹することができる．

証明　C に含まれる論理記号の個数に関する数学的帰納法．

1.　C が論理記号を含まない場合．

1.1.　C が命題定数 $\curlywedge$ の場合．C の真理値は $\curlywedge$ で，$\neg\curlywedge$ は証明可能．

1.2.　C が命題変数 A_i（$1\leqq i\leqq m$）の場合．C の真理値は $\curlyvee$ で，A_i は（$*$）という仮定のもとで演繹可能．

1.3.　C が命題変数 B_j（$1\leqq j\leqq n$）の場合．C の真理値は $\curlywedge$ で，$\neg B_j$ は（$*$）という仮定のもとで演繹可能．

2.　C が論理記号を含む場合．C は

$$\mathcal{A}\rightarrow\mathcal{B},\qquad \mathcal{A}\wedge\mathcal{B},\qquad \mathcal{A}\vee\mathcal{B},\qquad \neg\mathcal{A}$$

のいずれかの形をしている．そのいずれの場合においても，論理式 $\mathcal{A}$ および $\mathcal{B}$ については定理が成立するものと仮定し（帰納法の仮定），$\mathcal{C}$ について定理が成立することを示す．

2.1.　$\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ の場合．

2.11.　$\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ の真理値が $\curlyvee$ の場合．このときは，$\mathcal{A}$ の真理値が $\curlywedge$ か，または，$\mathcal{B}$ の真理値が $\curlyvee$ である．

2.111.　$\mathcal{A}$ の真理値が $\curlywedge$ の場合．帰納法の仮定により，（＊）という仮定のもとで $\neg\mathcal{A}$ は演繹可能．以下，

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\mathcal{A}} \quad \neg\mathcal{A}}{\curlywedge}\ \neg\text{-除去}}{\mathcal{B}}\ \curlywedge\text{に関する推論}}{\mathcal{A}\to\mathcal{B}}\ \to\text{-導入 }1$$

とすることにより，（＊）という仮定のもとで $\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ は演繹可能．

2.112.　$\mathcal{B}$ の真理値が $\curlyvee$ の場合．帰納法の仮定により，（＊）という仮定のもとで $\mathcal{B}$ は演繹可能．よって，以下

$$\dfrac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}\to\mathcal{B}}\ \to\text{-導入}$$

とすることにより，同じ仮定のもとで $\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ は演繹可能．

2.12.　$\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ の真理値が $\curlywedge$ の場合．$\mathcal{A}$ の真理値は $\curlyvee$ で，$\mathcal{B}$ の真理値は $\curlywedge$．帰納法の仮定により，（＊）という仮定のもとで $\mathcal{A}$ および $\neg\mathcal{B}$ が演繹可能．以下，

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathcal{A} \quad \overset{1}{\mathcal{A}\to\mathcal{B}}}{\mathcal{B}}\ \to\text{-除去} \qquad \neg\mathcal{B}}{\curlywedge}\ \neg\text{-除去}}{\neg(\mathcal{A}\to\mathcal{B})}\ \neg\text{-導入 }1$$

とすることにより，$\neg(\mathcal{A}\to\mathcal{B})$ も演繹可能．

2.2.　$\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}$ の場合．

2.21.　$\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}$ の真理値が $\curlyvee$ の場合．$\mathcal{A}$ および $\mathcal{B}$ の真理値はともに $\curlyvee$．帰納法の仮定により，$\mathcal{A}$ も $\mathcal{B}$ も演繹可能．以下，

$$\frac{\mathcal{A}\quad\mathcal{B}}{\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}}\ \wedge\text{-導入}$$

とすればよい．

2.22.　$\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}$ の真理値が $\curlywedge$ の場合．$\mathcal{A}$ および $\mathcal{B}$ の少なくとも一方の真理値は $\curlywedge$．$\mathcal{A}$ の真理値が $\curlywedge$ ならば，$\neg\mathcal{A}$ は演繹可能で，

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\overset{1}{\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}}}{\mathcal{A}}\ \wedge\text{-除去}\qquad \neg\mathcal{A}}{\curlywedge}\ \neg\text{-除去}}{\neg(\mathcal{A}\wedge\mathcal{B})}\ \neg\text{-導入}\ 1$$

とする．

$\mathcal{B}$ の真理値が $\curlywedge$ のときも同様．

2.3.　$\mathcal{A}\vee\mathcal{B}$ の場合．

2.31.　$\mathcal{A}\vee\mathcal{B}$ の真理値が $\curlyvee$ の場合．$\mathcal{A}$ および $\mathcal{B}$ の少なくとも一方の真理値が $\curlyvee$．$\mathcal{A}$ の真理値が $\curlyvee$ ならば，$\mathcal{A}$ は演繹可能で，

$$\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A}\vee\mathcal{B}}\ \vee\text{-導入}$$

とする．

$\mathcal{B}$ の真理値が $\curlyvee$ のときも同様．

2.32.　$\mathcal{A}\vee\mathcal{B}$ の真理値が $\curlywedge$ の場合．$\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ の真理値はともに $\curlywedge$．よって，$\neg\mathcal{A}$ および $\neg\mathcal{B}$ がともに演繹可能となるから

$$\cfrac{\cfrac{\overset{2}{\mathcal{A}\vee\mathcal{B}}\qquad \cfrac{\overset{1}{\mathcal{A}}\quad \neg\mathcal{A}}{\curlywedge}\ \neg\text{-除去}\qquad \cfrac{\overset{1}{\mathcal{B}}\quad \neg\mathcal{B}}{\curlywedge}\ \neg\text{-除去}}{\curlywedge}\ \vee\text{-除去}\ 1}{\neg(\mathcal{A}\vee\mathcal{B})}\ \neg\text{-導入}\ 2$$

とする．

2.4.　$\neg\mathcal{A}$ の場合．

2.41.　$\neg\mathcal{A}$ の真理値が $\curlyvee$ の場合．$\mathcal{A}$ の 真理値は $\curlywedge$．帰納法の仮定により $\neg\mathcal{A}$ は演繹可能．

2.42.　$\neg\mathcal{A}$ の真理値が $\curlywedge$ の場合．$\mathcal{A}$ の真理値が $\curlyvee$ となるから，$\mathcal{A}$ は演繹可能．あとは

$$\dfrac{\dfrac{\mathcal{A} \quad \overset{1}{\neg\mathcal{A}}}{\text{人}}\ \neg\text{-除去}}{\neg\neg\mathcal{A}}\ \neg\text{-導入 } 1$$

とする [$\neg\mathcal{A}$ を C とすれば，$\neg C$ は $\neg\neg\mathcal{A}$].

以上によって，定理 1 の証明は完了した．

この定理 1 の証明には〈排中律〉を用いる機会は 1 度もなかった．したがって，定理 1 は**直観主義の命題論理に対して成立する定理**なのである．

定理 2. トートロジーは古典命題論理において証明可能である（**命題論理の完全性**）．

証明 $\mathcal{A}$ を 1 つのトートロジーとし，$\mathcal{A}$ に含まれるすべての命題変数を

$$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n$$

とする．いま，A_i' という記号で

$$A_i \qquad \text{または} \qquad \neg A_i$$

のいずれかを表わすとすれば，定理 1 により，$\mathcal{A}$ は

(♯) $$A_1',\ A_2',\ \cdots,\ A_n'$$

という仮定のもとで演繹することができる．ここで，おのおのの A_i につき，A_i' としては A_i または $\neg A_i$ の 2 通りずつの選び方があるから，(♯) という形の仮定は全体として 2^n 通りの選び方がある．その 2^n 通りのうちのどの仮定をとっても，それから $\mathcal{A}$ は演繹されるのである．

そこでいま，$A_1', \cdots, A_{n-1}'$ のひと組を任意に固定して考えると，仮定として

$$A_1',\ \cdots,\ A_{n-1}',\ A_n$$

を採用しても，また

$$A_1',\ \cdots,\ A_{n-1}',\ \neg A_n$$

を採用しても，そのいずれからも $\mathcal{A}$ は演繹される．

$$\dfrac{\overset{\text{排中律}}{A_n \vee \neg A_n} \quad \dfrac{[A_n]}{\mathcal{A}} \quad \dfrac{[\neg A_n]}{\mathcal{A}}}{\mathcal{A}}\ \vee\text{-除去}$$

という推論を考えれば，このことから，じつは

$$A_1', \cdots, A_{n-1}'$$

という仮定だけから $\mathcal{A}$ が演繹されるということがわかる．

ここで，$A_1', \cdots, A_{n-1}'$ の選び方が任意であったことに注意し，これと同じ論法をもう１度くり返えすと，$\mathcal{A}$ というトートロジーは，さらに

$$A_1', \cdots, A_{n-2}'$$

という仮定だけからでも演繹可能であるということもわかる．かくして，このような論法を n 回くり返えすことによって，われわれは，トートロジー $\mathcal{A}$ が何の仮定もなしに証明されるということを知ることができる．

付録IV. 論理記号のいろいろ

第1章でも注意しておいたように，論理記号の使用法はまことに多種多様である．ここにその代表的なものをあげ，読者の参考に供する．これ以外の使用法においても，多くの場合，ここに挙げたものの組み合わせとか，または，それから容易に類推することができるものなので，実際にはあまり不便を感じない．

1. ゲンツェンの論理記号 本書においては，だいたい，この**ゲンツェン**(Gentzen) の方法にしたがっている．本書で

$$\rightarrow, \quad \rightleftarrows, \quad \wedge, \quad \vee, \quad \neg, \quad \forall, \quad \exists$$

としたものは，もとのゲンツェンにおいては，それぞれ

$$\supset, \quad \supset\subset, \quad \&, \quad \vee, \quad \neg, \quad \forall, \quad \exists$$

となっている．しかも，$\supset$，$\vee$，$\exists$ は**ラッセル** (Russell) にしたがい，& は**ヒルベルト** (Hilbert) により，$\supset\subset$ と $\neg$ とは**ハイティング** (Heyting) のもので，$\forall$ は $\exists$ に対応させた記号として用いたのだ，とゲンツェン自身述べている．ハイティングはやはり $\wedge$ という記号を用いているので，われわれの記号は，ゲンツェンのと同じくらいに，またハイティングのものにも似ている．

本書において $\rightarrow$ という記号を用いたのに，特別な理由は何もない．単に $\rightarrow$ という記号がポピュラーなものであると思ったからに過ぎない．本書での $\rightleftarrows$ を $\leftrightarrow$ という記号で表わす流儀も最近は多く見受けられる．$\rightarrow$，$\leftrightarrow$ の代りに $\Rightarrow$，$\Leftrightarrow$ と書くことも多い．収束などを意味する $\rightarrow$ との区別のためであろう．
ゲンツェンは，本書における $\rightarrow$ と，内容的解釈において類似しているが，形式的には異なった意味で $\rightarrow$ という記号を用いている．ハイティングは，その後の著書において，$\supset$ の代わりに $\rightarrow$ を用いるようになった．こうなると，本書の論

理記号は，ゲンツェンのよりはハイティングの用法に一層似てくることになる．

2.　ラッセルの論理記号　ラッセルは

$$\to,\quad \rightleftarrows,\quad \wedge,\quad \vee,\quad \neg,\quad \forall x,\quad \exists x$$

として

$$\supset,\quad \equiv,\quad \cdot,\quad \vee,\quad \sim,\quad (x),\quad (\exists x)$$

という記法を用いている．たとえば，$A \wedge B$ のことは $A \cdot B$ [A と B の積] と書き，$\forall x F(x)$ を $(x)F(x)$ と書くのである．

3.　ヒルベルトの論理記号

$$\to,\quad \rightleftarrows,\quad \wedge,\quad \vee,\quad \neg,\quad \forall x,\quad \exists x$$

として

$$\to,\quad \sim,\quad \&,\quad \mathrm{v},\quad \overline{},\quad (x),\quad (Ex)$$

を用いる．とくに否定は，$\neg A$ の意味で $\overline{A}$ と書き，たとえば，

$$\neg(A \vee B),\qquad \neg\forall x F(x),\qquad \neg\exists x F(x)$$

のことは，それぞれ

$$\overline{A \,\mathrm{v}\, B},\qquad \overline{(x)}F(x),\qquad \overline{(Ex)}F(x)$$

などと表わす．

4.　ライプニッツの論理記号　記号論理の先駆者と考えられている**ライプニッツ** (Leibniz) は，

$$A \vee B \quad \text{および} \quad A \wedge B$$

として，それぞれ

$$A+B \quad \text{および} \quad A \cdot B$$

という記法を用いたということである．$A \vee B$ のことを**論理和** (logical sum)，$A \wedge B$ のことを**論理積** (logical product) とよぶが，このような名称はライプニッツの記号法に由来するのであろうか．この流儀にしたがえば，全称命題 $\forall x F(x)$ および存在命題 $\exists x F(x)$ は

$$\prod_x F(x) \quad \text{および} \quad \sum_x F(x)$$

と表わすのである．というのは，たとえば，変数 x が有限個の対象

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$$

を代表している場合には，$\forall x F(x)$ は

$$F(x_1) \wedge F(x_2) \wedge \cdots \wedge F(x_n)$$

すなわち

$$\prod_{i=1}^{n} F(x_i) = F(x_1) \cdot F(x_2) \cdot \cdots \cdot F(x_n)$$

を意味しているし，$\exists x F(x)$ は

$$F(x_1) \vee F(x_2) \vee \cdots \vee F(x_n)$$

すなわち

$$\sum_{i=1}^{n} F(x_i) = F(x_1) + F(x_2) + \cdots + F(x_n)$$

ということになるからである．

最近は，$\forall x F(x)$ とか $\exists x F(x)$ を表わすのに，

$$\bigwedge x F(x), \qquad \bigvee x F(x)$$

という記法も用いるようになった．これは，上記の Π や Σ の用法と同じ精神によるものであろう．

この系統の記号は，集合計算の場合，和集合・共通部分を表わすものとして，今日でも比較的広く用いられている．とくに

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

という分配律を

$$A(B+C) = AB + AC$$

と表わす場合には，算術的分配律との形式的類似性が保たれて，はなはだ便利である．しかし，

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

というほうの分配律を

$$A + BC = (A+B)(A+C)$$

と書く場合には，これは必ずしも見やすいとは言いきれない．

5. ポーランド式の表記法 (Polish notation)　これは，ポーランド学派の人々によって多く用いられる記号法である．

ここでは，p や q という文字で命題を表わす．それは，A とか C という文字が論理記号として用いられるからである．以下において，左がポーランド学派の記法，右は，それをわれわれの記法に翻訳したものである．

$$Cpq \quad \cdots\cdots \quad p \to q$$

$$Kpq \quad \cdots\cdots \quad p \wedge q$$

$$Apq \quad \cdots\cdots \quad p \vee q$$

$$Np \quad \cdots\cdots \quad \neg p$$

$$\Pi xFx \quad \cdots\cdots \quad \forall xF(x)$$

$$\Sigma xFx \quad \cdots\cdots \quad \exists xF(x)$$

この記法ではカッコは用いない．たとえば，$p \rightleftarrows q$ を表わす

$$(p \to q) \wedge (q \to p)$$

などは

$$KCpqCqp$$

と書くのである．

6. ヒルベルトの ε 記号　これは，本書に述べたことと直接の関係はないことであるが，ついでのことであるから，ここで説明しておく．

F を任意に与えられた述語とする場合，$\varepsilon xF(x)$ という記号をもって，われわれは 1 つの〈もの〉を表わす．それがどのような〈もの〉であるかといえば，それは

$$\exists xF(x) \to F(\varepsilon xF(x))$$

という命題を正しくするような〈もの〉である．すなわち：

> F という性質をもつ〈もの〉が少なくとも 1 つ存在する限りにおいて，$\varepsilon xF(x)$ という式によって表わされる〈もの〉は必ず F という性質をもたねばならぬ．

であるから，$\varepsilon xF(x)$ という式で表わされるものとしては，F という性質をもつ〈もの〉が 1 つでも存在する限り，その性質 F をもつ〈もの〉のうちの任意の 1 つを指定すれば十分であるし，また，もし性質 F をもつ〈もの〉が 1 つもない場合には，$\varepsilon xF(x)$ としてまったく任意の〈もの〉を選ぶこと

ができる．

εx というのは述語 $F(x)$ に1つの〈もの〉を対応させる関数である．性質 F をもつ〈もの〉の全体からなる集合が空でない限り，$\varepsilon x F(x)$ はその集合の1つの元を表わしている．その意味でこの εx のことをヒルベルトは**超限論理的選択関数**（独 transfinite logische Auswahlfunktion）と名づけた．

ヒルベルトの ε 記号を用いると，**超限的な命題**——普通の表記法で $\forall$ や $\exists$ を含む命題——を $\forall$ や $\exists$ を使わずに表わすことができる．それは，

$$\exists x F(x) \qquad \text{および} \qquad \forall x F(x)$$

という命題が，それぞれ

$$F(\varepsilon x F(x)) \qquad \text{および} \qquad F(\varepsilon x \neg F(x))$$

と表わされるからである．

このことを簡単に説明しておけば：

1)　まず，

$$\exists x F(x) \rightarrow F(\varepsilon x F(x))$$

は $\varepsilon x F(x)$ の定義そのものである．また，$F(\varepsilon x F(x))$ が正しければ，$\varepsilon x F(x)$ は条件 F をみたすことになり，少なくとも性質 F をもつ〈もの〉が1つは存在するわけであるから，

$$F(\varepsilon x F(x)) \rightarrow \exists x F(x).$$

よって，

$$\exists \boldsymbol{x} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \rightleftarrows \boldsymbol{F}(\varepsilon \boldsymbol{x} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}))$$

ということがわかる．

2)　上に説明したことから，性質 F の代わりに $\neg F$ を用いて，

$$\exists x \neg F(x) \rightleftarrows \neg F(\varepsilon x \neg F(x))$$

ということがわかるから，

$$\neg \exists x \neg F(x) \rightleftarrows \neg\neg F(\varepsilon x \neg F(x))$$

ということもわかる．この式の左辺は $\forall x F(x)$ ということにほかならず，右辺は $F(\varepsilon x \neg F(x))$ というのと同じことであるから，

$$\forall \boldsymbol{x} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \rightleftarrows \boldsymbol{F}(\varepsilon \boldsymbol{x} \neg \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})).$$

ブールバキ（Bourbaki）の集合論の教科書では，この ε 記号をもとにして，それから $\forall$ や $\exists$ を定義している．ただし，ε という記号の代わりに τ という字が使ってある．どうして ε が τ になったのかよくわからないが，黒

田成勝先生が昔の岩波講座での1項目〈数学基礎論〉のなかで，やはり ε 記号として τ を用いておられるので，なにか理由があるのかも知れない．

参 考 書

本書は，〈はしがき〉にも述べましたように，記号論理の専門家たらんと考えられる人々のための入門書ではありません．ですから，他の専門書との関連はほとんど考慮しませんでした．しかし，本書を読み終えられた後に，さらにすすんで，この方面の勉強をされたいと思われる方々には

［1］ 竹内外史　数学基礎論（共立出版，現代数学講座）

をおすすめします．もし，［1］と本書との間にいささかの橋渡しが必要とお考えの向きは

［2］ 前原昭二　数理論理学序説（共立全書）

をご参照下さい．本書との間に内容的な重複はありますが，まったく違った観点から書かれた入門書であります．

［3］ 黒田成勝　数学基礎論（岩波講座〈数学〉）

における記号論理の説明の部分は大変スッキリしていて，われわれもはじめこれで勉強したのでありますが，現在これが手に入りますかどうか．図書館ででもご覧になるということになりましょう．

［4］ ヒルベルト=アッケルマン（伊藤 誠 訳）　記号論理学の基礎（大阪教育図書）

の原著

Hilbert-Ackermann, Grundzüge der theoretischen Logik (Springer)

は，記号論理学の初期から現在にいたるまでの標準的な教科書であります．比較的最近に，原著は第4版として大改訂が加えられましたが，どちらかというと，わたくしは第3版までの旧版を推奨します．訳本のほうについて，その辺の消息をわたくしはよく知りません．

[5] ノヴィコフ（石本新訳）記号論理学（東京図書）

がむしろ，ヒルベルト=アッケルマンの旧版の趣きをよく伝えております．

本書の性格上，洋書についてくわしく述べる必要はないと思いますが，一応のものとして，

[6] Kleene, Introduction to metamathematics (North-Holland Publishing Co.)

[7] Church, Introduction to mathematical logic. Part I (Princeton University Press)

を挙げておきます．また，[4]の原著には英訳もあります．[6]は，どちらかというと，recursive function についての入門書ですが，記号論理についても結構くわしく書いてあります．[7]は記号論理の専門書でありますが，少しごたごたしているのが難点といえば難点です．それ以上の参考書になると，[6]の文献表に山ほど出ておりますが，私はやはり[1]の〈あとがき〉にも書いてある論文

[8] Gentzen, Untersuchungen über das logische Schließen. Mathematische Zeitschrift, **39** (1935)

を第1におします．そこに本書の〈たね〉を見いだされることと思います．

問 題 の 解 答

第2章

§1. 問

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{2}{A}\qquad\overset{1}{A\to B}}{B}}{(A\to B)\to B}\,1}{A\to[(A\to B)\to B]}\,2$$

§2. 問

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{2}{A}\qquad\overset{1}{B}}{A\wedge B}}{B\to(A\wedge B)}\,1}{A\to(B\to(A\wedge B))}\,2$$

§4. 問

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{2}{B}\qquad\dfrac{\overset{1}{A}\qquad\overset{3}{A\to\neg B}}{\neg B}}{\text{人}}}{\neg A}\,1}{B\to\neg A}\,2}{(A\to\neg B)\to(B\to\neg A)}\,3$$

§5. 問

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{A}\qquad\overset{2}{A\to\forall xF(x)}}{\forall xF(x)}}{F(a)}}{A\to F(a)}\,1}{\forall x(A\to F(x))}}{(A\to\forall xF(x))\to\forall x(A\to F(x))}\,2$$

ここで a は A および $F(x)$ に含まれない自由変数.[1)]

§6. 問

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{2}{A\wedge\exists xF(x)}}{\exists xF(x)}\qquad\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{2}{A\wedge\exists xF(x)}}{A}\qquad\overset{1}{F(a)}}{A\wedge F(a)}}{\exists x(A\wedge F(x))}}{\exists x(A\wedge F(x))}\,1}{(A\wedge\exists xF(x))\to\exists x(A\wedge F(x))}\,2$$

§7. 問

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{A}\qquad\overset{2}{\neg A}}{\text{人}}}{A\to\text{人}}\,1}{\neg A\to(A\to\text{人})}\,2$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{A}\qquad\overset{2}{A\to\text{人}}}{\text{人}}}{\neg A}\,1}{(A\to\text{人})\to\neg A}\,2$$

第3章

§4. 問

$$\dfrac{\dfrac{\overset{1}{A}}{A\vee B}}{A\to(A\vee B)}\,1$$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{1}{B}}{A\vee B}}{B\to(A\vee B)}\,1$$

1) こんごは，この種の〈ただし書き〉はいちいち述べないことにしますから，読者において適当に判断をして下さい.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{2}{A\lor B}\qquad \dfrac{\overset{1}{A}\quad \overset{4}{\neg A}}{\text{人}}\qquad \dfrac{\overset{1}{B}\quad \overset{3}{\neg B}}{\text{人}}}{\text{人}}\ \lor\text{-除去}\,1}{\neg(A\lor B)}\ 2}{\neg B\to\neg(A\lor B)}\ 3}{\neg A\to[\neg B\to\neg(A\lor B)]}\ 4$$

第4章

§1. 問

2.

A	$\neg A$	$A\land\neg A$	$\neg(A\land\neg A)$
Y	人	人	Y
人	Y	人	Y

3.

A	$\neg A$	$\neg\neg A$	$(\neg\neg A)\rightleftarrows A$
Y	人	Y	Y
人	Y	人	Y

4.

A	B	$A\lor B$	$\neg(A\lor B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A\land\neg B$
Y	Y	Y	人	人	人	人
Y	人	Y	人	人	Y	人
人	Y	Y	人	Y	人	人
人	人	人	Y	Y	Y	Y

A	B	$A\land B$	$\neg(A\land B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A\lor\neg B$
Y	Y	Y	人	人	人	人
Y	人	人	Y	人	Y	Y
人	Y	人	Y	Y	人	Y
人	人	人	Y	Y	Y	Y

5.

A	B	$A\to B$	$\neg A$	$\neg A\vee B$
Y	Y	Y	人	Y
Y	人	人	人	人
人	Y	Y	Y	Y
人	人	Y	Y	Y

6.

A	B	$A\wedge B$	$\neg A\wedge\neg B$	$(A\wedge B)\vee(\neg A\wedge\neg B)$
Y	Y	Y	人	Y
Y	人	人	人	人
人	Y	人	人	人
人	人	人	Y	Y

7.

A	B	$A\to B$	$(A\to B)\to B$
Y	Y	Y	Y
Y	人	人	Y
人	Y	Y	Y
人	人	Y	人

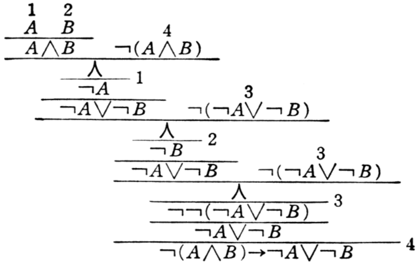
第5章

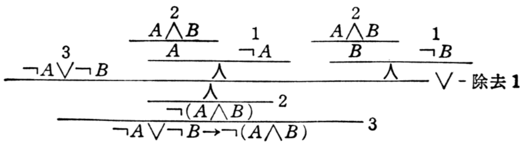
§ 1. 問

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{B\rightleftarrows B' \quad \dfrac{A\rightleftarrows A' \quad \overset{1}{F(A,B)}}{F(A',B)}}{F(A',B')}}{F(A,B)\to F(A',B')}\,1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{B\rightleftarrows B' \quad \dfrac{A\rightleftarrows A' \quad \overset{2}{F(A',B')}}{F(A,B')}}{F(A,B)}}{F(A',B')\to F(A,B)}\,2}{F(A,B)\rightleftarrows F(A',B')}$$

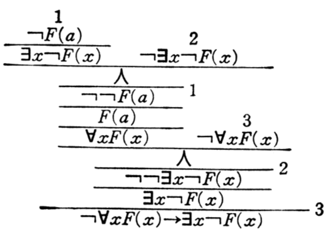
第6章

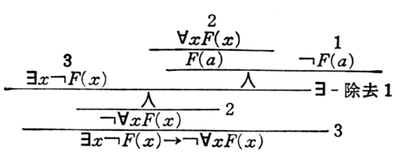
§1. 問





§2. 問





以上2つの証明のいずれにおいても，a は $F(x)$ に含まれない自由変数とする．

第7章

§1.　問 1.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{(A\wedge B)\wedge C}}{A\wedge B}}{A} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{(A\wedge B)\wedge C}}{A\wedge B}}{B} \qquad \dfrac{\overset{1}{(A\wedge B)\wedge C}}{C}}{B\wedge C}}{A\wedge(B\wedge C)}}{(A\wedge B)\wedge C\to A\wedge(B\wedge C)}\,1$$

問 2.　第6章・§4の方法によって変形すれば

$$[\neg A\vee B\vee C]\rightleftarrows[\neg A\vee B\vee\neg A\vee C]$$

となる．これは，〈交換律〉と〈ベキ等律〉を用いれば証明できる．

問 3.　$[(A\wedge B)\to C]\rightleftarrows[(A\to C)\vee(B\to C)]$ の左辺は，まず

$$\neg(A\wedge B)\vee C$$

と変形されるが，ド・モルガンの法則によれば

$$\neg A\vee\neg B\vee C$$

となる．右辺は

$$\neg A\vee C\vee\neg B\vee C$$

となるから，交換律・ベキ等律を用いればよい．

問 4.　左辺を変形すれば

$$\neg A\vee\neg B\vee C$$

となる．問3の解答によれば，右辺もこれと同じ式に変形される．

問 5.　左辺を

$$\neg(A\vee B)\vee C$$

と変形し，ド・モルガンの法則を用いて，さらに

$$(\neg A\wedge\neg B)\vee C$$

とすれば，

$$[(\neg A\wedge\neg B)\vee C]\rightleftarrows[(\neg A\vee C)\wedge(\neg B\vee C)]$$

という形の分配律になる．

問 6.　左辺を $(\neg A\vee B)\to C$ と変形すれば，問5の形になる．

問 7.　$(\neg A\to B)\rightleftarrows(\neg\neg A\vee B).$

ここで2重否定の法則を用いる．

問 8.　例5によれば

$$(A\to\neg B)\rightleftarrows(\neg\neg B\to\neg A).$$

ここで2重否定の法則を用いる．

問 9.　問8と同様に考えればよい．あるいは，問7によって，

$$(\neg A\to B)\rightleftarrows(A\vee B),$$

$$(\neg B \to A) \rightleftarrows (B \lor A)$$

となることを利用するのもよい。

問 10.

$$(A \to \neg A) \rightleftarrows (\neg A \lor \neg A)$$

として〈ベキ等律〉を用いる.

問 11. 問10と同様に考え，途中で2重否定の法則を用いればよい。

問 12. $A \to B$ を $\neg A \lor B$ におきかえ，ド・モルガンの法則によって

$$\neg(A \to B) \rightleftarrows (\neg\neg A \land \neg B).$$

ここで2重否定の法則を用いればよい。

§ 2.

問 1. $A \to A$ を $\neg A \lor A$ と変形すれば，これは排中律そのものになる。

問 2. 例1の双対.

問 3. $A \to 人$ を $\neg A \lor 人$ と変形すれば

$$\neg A \lor 人 \rightleftarrows \neg A$$

となる.

問 4. $\curlyvee \to A$ を $\neg\curlyvee \lor A$ と変形すれば

$$人 \lor A \rightleftarrows A$$

となる.

問 5. 吸収律

$$A \land (A \lor B) \rightleftarrows A$$

において，A を $(A \lor B) \land (A \lor \neg B)$ で置きかえれば（例1），

$$(A \lor B) \land (A \lor \neg B) \land (A \lor B) \rightleftarrows (A \lor B) \land (A \lor \neg B)$$

となる. これは，結合律・交換律・ベキ等律により明らか。

もう1つの吸収律は，これの双対.

問 6. $A \rightleftarrows B$ は

$$(A \to B) \land (B \to A)$$

のことである. これを

$$(\neg A \lor B) \land (\neg B \lor A)$$

と変形し，分配律によって展開すれば，

$$(\neg A \land \neg B) \lor (\neg A \land A) \lor (B \land \neg B) \lor (B \land A)$$

すなわち，

$$(\neg A \land \neg B) \lor 人 \lor 人 \lor (B \land A).$$

これが

$$(A \land B) \lor (\neg A \land \neg B)$$

に同値であることを示すのは容易である.

問 7. 前問によれば，$\neg(A \rightleftarrows B)$ は

$$\neg[(A\wedge B)\vee(\neg A\wedge\neg B)]$$

に同値である．ド・モルガンの法則によれば，これは

$$\neg(A\wedge B)\wedge\neg(\neg A\wedge\neg B)$$

さらに

$$(\neg A\vee\neg B)\wedge(\neg\neg A\vee\neg\neg B)$$

となる．$\neg\neg A$ に 2 重否定の法則を適用して

$$(\neg A\vee\neg B)\wedge(\neg\neg B\vee A)$$

と変形すれば，

$$(A\to\neg B)\wedge(\neg B\to A)$$

すなわち $A\rightleftarrows\neg B$ に同値となる．

問 8.　$(A\to B)\to B$ を

$$\neg(\neg A\vee B)\vee B$$

と変形し，ド・モルガンの法則と 2 重否定の法則を用いて

$$(A\wedge\neg B)\vee B$$

とする．さらに分配律を用いれば

$$(A\vee B)\wedge(\neg B\vee B)$$

すなわち

$$(A\vee B)\wedge\curlyvee$$

となり，結局のところ $A\vee B$ と同値になる．

問 9.　$A\to\curlyvee$ を変形すれば $\neg A\vee\curlyvee$ となる．

§ 3.

問 1.　x の変域を自然数の全体とし，$F(x)$ を〈x は偶数である〉，$G(x)$ を〈x は奇数である〉ということにすれば，これは双方の反例を同時に与えている．

問 2.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{2}{\forall xF(x)\vee\forall xG(x)}\qquad\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\forall xF(x)}}{F(a)}}{F(a)\vee G(a)}\qquad\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\forall xG(x)}}{G(a)}}{F(a)\vee G(a)}}{F(a)\vee G(a)}\ \vee\text{-除去 }1}{\forall x(F(x)\vee G(x))}}{\forall xF(x)\vee\forall xG(x)\to\forall x(F(x)\vee G(x))}\ 2$$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{2}{\exists x(F(x)\wedge G(x))}\qquad\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{F(a)\wedge G(a)}}{F(a)}}{\exists xF(x)}\qquad\dfrac{\dfrac{\overset{1}{F(a)\wedge G(a)}}{G(a)}}{\exists xG(x)}}{\exists xF(x)\wedge\exists xG(x)}}{\exists xF(x)\wedge\exists xG(x)}\ \exists\text{-除去 }1}{\exists x(F(x)\wedge G(x))\to\exists xF(x)\wedge\exists xG(x)}\ 2$$

［以上によって証明された2つの結果は，互いに他の双対になっているから，一方のみを証明すれば十分である.］

問 3.　証明すべき式を

$$(\neg\exists xF(x)\vee\forall xG(x))\to\forall x(\neg F(x)\vee G(x))$$

と変形し，左辺の $\neg\exists xF(x)$ をド・モルガンの法則によって $\forall x\neg F(x)$ に置きかえれば，

$$(\forall x\neg F(x)\vee\forall xG(x))\to\forall x(\neg F(x)\vee G(x)).$$

これが成立することは，問2で証明されている.

問 4.　3.2を用いて，

$$\exists x(A\to F(x))\rightleftarrows(\forall xA\to\exists xF(x)).$$

ここで $\forall xA\rightleftarrows A$ に注意すれば，

$$\exists x(A\to F(x))\rightleftarrows(A\to\exists xF(x)).$$

問 5.　前問と同様.［$\exists xA\rightleftarrows A$ に注意して，3.2を用いる.］

問 6.
$$\forall x(\neg F(x)\vee A)\rightleftarrows(\neg\exists xF(x)\vee A)$$

と変形し，交換律とド・モルガンの法則により

$$\forall x(A\vee\neg F(x))\rightleftarrows(A\vee\forall x\neg F(x))$$

と書きかえれば，5.2の第1式に還元される.

問 7.　まず，$\forall xF(x)\vee\forall xG(x)$ と $\forall xF(x)\vee\forall yG(y)$ とが同値であることから

$$\forall xF(x)\vee\forall yG(y)\rightleftarrows\forall x\forall y(F(x)\vee G(y))$$

を示せばよいということに注意する. $F(x)$ が y を自由変数として含まぬことを利用し［このことは，問題中，明白には述べていないが，暗黙のうちに仮定されている］，

$$\forall y(F(x)\vee G(y))\rightleftarrows F(x)\vee\forall yG(y).$$

ゆえに

$$\forall x\forall y(F(x)\vee G(y))\rightleftarrows\forall x(F(x)\vee\forall yG(y)).$$

また，x が $\forall yG(y)$ に含まれぬことを利用して，

$$\forall x(F(x)\vee\forall yG(y))\rightleftarrows\forall xF(x)\vee\forall y\,G(y).$$

ゆえに

$$\forall x\forall y(F(x)\vee G(y))\rightleftarrows\forall xF(x)\vee\forall y\,G(y).$$

問 8.　与えられた同値式を

$$\forall x\exists y(\neg F(x)\vee G(y))\rightleftarrows\exists y\forall x(\neg F(x)\vee G(y))$$

と変形して考えれば，この両辺はいずれも

$$\forall x\neg F(x)\vee\exists yG(y)$$

に同値である.

問 9.　ド・モルガンの法則により，

$$\neg\forall x(F(x)\to G(x))\rightleftarrows\exists x\neg(F(x)\to G(x)).$$

ここで，

$$\neg(F(x)\to G(x))\rightleftarrows(F(x)\wedge\neg G(x))$$

を用いればよい（§1，問12）.

第8章

§1.　問1.

$$\dfrac{\dfrac{a=a \qquad \dfrac{\overset{1}{a=b} \qquad a=b\to(a=a\to b=a)}{a=a\to b=a}}{b=a}}{a=b\to b=a}\,1$$

$x=a$ を $F(x)$ と表わせば，

$$a=b\to(a=a\to b=a)$$

は $a=b\to(F(a)\to F(b))$ と考えられ，したがって，これは公理である.

問2.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{a=b\wedge b=c}}{b=c} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{a=b\wedge b=c}}{a=b} \qquad \overset{(\text{対称律})}{a=b\to b=a}}{b=a} \qquad b=a\to(b=c\to a=c)}{b=c\to a=c}}{a=c}}{(a=b\wedge b=c)\to a=c}\,1$$

$x=c$ を $F(x)$ と表わせば，

$$b=a\to(b=c\to a=c)$$

は $b=a\to(F(b)\to F(a))$ となり，これは公理である.

問3.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{t=t \qquad \overset{1}{F(t)}}{t=t\wedge F(t)}}{\exists x(x=t\wedge F(x))}}{F(t)\to\exists x(x=t\wedge F(x))}\,1$$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{2}{\exists x(x=t\wedge F(x))} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{1}{a=t\wedge F(a)}}{F(a)} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{1}{a=t\wedge F(a)}}{a=t} \qquad a=t\to(F(a)\to F(t))}{F(a)\to F(t)}}{F(t)}}{F(t)}\,\exists\text{-除去}\,1}{\exists x(x=t\wedge F(x))\to F(t)}\,2$$

ここで，自由変数 a として，対象式 t および命題 $F(x)$ に含まれていないものを選んでおけば，∃-除去に対する変数条件はみたされる．また，$a=t\to(F(a)\to F(t))$ には a が自由変数として含まれてはいるが，これは公理であって〈仮定〉ではないから，それが a を含んでいても変数条件には抵触しない.

問4.　前問の F の代わりに $\neg F$ を用いれば，

$$\neg F(t)\rightleftarrows\exists x(x=t\wedge\neg F(x))$$

となるから，

$$F(t)\rightleftarrows\neg\exists x(x=t\wedge\neg F(x))$$

となるが，この式の右辺でド・モルガンの法則と2重要否定の法則を適用すれば，

$$F(t)\rightleftarrows\forall x(\neg x=t\vee F(x)).$$

すなわち，

$$F(t)\rightleftarrows\forall x(x=t\to F(x)).$$

問 5.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{s=t}\quad s=t\to(F(s)\to F(t))}{F(s)\to F(t)}\qquad\dfrac{\dfrac{\overset{1}{s=t}\quad s=t\to t=s\ (\text{対称律})}{t=s}\quad t=s\to(F(t)\to F(s))}{F(t)\to F(s)}}{\dfrac{F(s)\rightleftarrows F(t)}{s=t\to(F(s)\rightleftarrows F(t))}\,1}$$

問 6.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{s=t}\qquad s=t\to(F(s)\rightleftarrows F(t))}{F(s)\rightleftarrows F(t)}}{F(s)\to F(t)}}{s=t\to(F(s)\to F(t))}\,1$$

問 7.　$\exists x\forall y(F(y)\to y=x)$　［問14を参照.］

問 8.　$\exists x\exists y[(F(x)\wedge F(y))\wedge x\neq y]$. ここで，$x\neq y$ は $\neg(x=y)$ の略記号. また，この命題の否定

$$\neg\exists x\exists y[(F(x)\wedge F(y))\wedge x\neq y]$$

をド・モルガンならびに2重否定の法則を用いて変形すると，

$$\forall x\forall y[\neg(F(x)\wedge F(y))\vee x=y],$$

すなわち

$$\forall x\forall y[(F(x)\wedge F(y))\to x=y].$$

これは〈$F(x)$ という x がたかだか1つしか存在しない〉ということである.

問 9.　(1) たとえば：

$$\exists x\exists y\forall z[F(z)\to(z=x\vee z=y)]$$

あるいは

$$\forall x\forall y\forall z[(F(x)\wedge F(y)\wedge F(z))\to(x=y\vee x=z\vee y=z)].$$

(2)　$\exists x\exists y\{F(x)\wedge F(y)\wedge x\neq y\wedge\forall z[F(z)\to(z=x\vee z=y)]\}$

あるいは

$$\exists x\exists y(F(x)\wedge F(y)\wedge x\neq y)$$
$$\wedge\forall x\forall y\forall z[(F(x)\wedge F(y)\wedge F(z))\to(x=y\vee x=z\vee y=z)].$$

問 10.

$$\dfrac{\dfrac{\overset{2}{\exists x[F(x)\land\forall y(F(y)\to y=x)]}\qquad\dfrac{\dfrac{\overset{1}{F(a)\land\forall y(F(y)\to y=a)}}{F(a)}}{\exists xF(x)}}{\exists xF(x)}\;1}{\exists x[F(x)\land\forall y(F(y)\to y=x)]\to\exists xF(x)}\;2$$

問 11.

$$\dfrac{\dfrac{\overset{2}{\exists x[F(x)\land\forall y(F(y)\to y=x)]}\qquad\dfrac{\dfrac{\overset{1}{F(a)\land\forall y(F(y)\to y=a)}}{\forall y(F(y)\to y=a)}}{\exists x\forall y(F(y)\to y=x)}}{\exists x\forall y(F(y)\to y=x)}\;1}{\exists x[F(x)\land\forall y(F(y)\to y=x)]\to\exists x\forall y(F(y)\to y=x)}\;2$$

問 12.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{3}{\exists x\forall y(F(y)\to y=x)}\qquad\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{2}{F(b)\land F(c)}}{F(b)}\qquad\dfrac{\overset{1}{\forall y(F(y)\to y=a)}}{F(b)\to b=a}}{b=a}\qquad\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{2}{F(b)\land F(c)}}{F(c)}\qquad\dfrac{\overset{1}{\forall y(F(y)\to y=a)}}{F(c)\to c=a}}{c=a}\qquad c=a\to a=c}{a=c}}{b=a\ \land\ a=c}\qquad(b=a\land a=c)\to b=c}{b=c}}{\dfrac{b=c}{(F(b)\land F(c))\to b=c}\;2}\;1}{\forall x\forall y[(F(x)\land F(y))\to x=y]}\;\forall\text{-導入を2回}}{\exists x\forall y(F(y)\to y=x)\to\forall x\forall y[(F(x)\land F(y))\to x=y]}\;3$$

問 13.　問 11 と問 12 から

$$\exists!xF(x)\to\forall x\forall y[(F(x)\land F(y))\to x=y]$$

がわかり，これと問 10 から

$$\exists!xF(x)\to\{\exists xF(x)\land\forall x\forall y[(F(x)\land F(y))\to x=y]\}$$

となることがわかる．したがって，逆の

$$\{\exists xF(x)\land\forall x\forall y[(F(x)\land F(y))\to x=y]\}\to\exists!xF(x)$$

だけを証明すればよいのであるが，そのためには，

$$\exists xF(x)\qquad と\qquad\forall x\forall y[(F(x)\land F(y))\to x=y]$$

とを仮定して　$\exists!xF(x)$ を導けばよい：

$$\dfrac{\exists xF(x)\qquad\dfrac{\dfrac{\overset{2}{F(b)}\qquad\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{F(a)}\quad\overset{2}{F(b)}}{F(a)\land F(b)}\qquad\dfrac{\forall x\forall y[(F(x)\land F(y))\to x=y]}{(F(a)\land F(b))\to a=b}\;\forall\text{-除去を2回}}{a=b}}{F(a)\to a=b}\;1}{\forall y(F(y)\to y=b)}}{F(b)\land\forall y(F(y)\to y=b)}}{\exists x[F(x)\land\forall y(F(y)\to y=x)]}}{\exists x[F(x)\land\forall y(F(y)\to y=x)]}\;2$$

問 14.　問12によって，この問題の半分はすでに片づいているから，あとは

$$\forall x\forall y[(F(x)\wedge F(y))\to x=y]\to\exists x\forall y(F(y)\to y=x)$$

だけを示せばよい．また，問11と問13を組み合わせると，

$$\exists xF(x)\qquad と\qquad \forall x\forall y[(F(x)\wedge F(y))\to x=y]$$

という2つの仮定を用いれば $\exists x\forall y(F(y)\to y=x)$ を導くことができることはわかるから，あとは，$\neg\exists xF(x)$ という仮定から $\exists x\forall y(F(y)\to y=x)$ を導けば十分である．それは，

$$\exists xF(x)\vee\neg\exists xF(x)$$

という排中律によるのである．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{F(a)}}{\exists xF(x)}\qquad\neg\exists xF(x)}{\curlywedge}}{a=b}\;1}{F(a)\to a=b}}{\forall y(F(y)\to y=b)}}{\exists x\forall y(F(y)\to y=x)}$$

問 15.　問13によれば［くわしくは，問10ならびに問11, 12によれば］，$\exists xF(x)$ という仮定のもとで

$$\forall x(F(x)\to G(x))\to\exists x(F(x)\wedge G(x))$$

を，また $\forall x\forall y[(F(x)\wedge F(y))\to x=y]$ という仮定のもとで

$$\exists x(F(x)\wedge G(x))\to\forall x(F(x)\to G(x))$$

を導けば十分である：

$$\dfrac{\dfrac{\exists xF(x)\qquad\dfrac{\dfrac{\overset{1}{F(a)}\qquad\dfrac{\overset{1}{F(a)}\qquad\dfrac{\overset{2}{\forall x(F(x)\to G(x))}}{F(a)\to G(a)}}{G(a)}}{F(a)\wedge G(a)}}{\exists x(F(x)\wedge G(x))}}{\exists x(F(x)\wedge G(x))}\;1}{\forall x(F(x)\to G(x))\to\exists x(F(x)\wedge G(x))}\;2$$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{3}{\exists x(F(x)\wedge G(x))}\qquad\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{2}{F(a)\wedge G(a)}}{G(a)}\qquad\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{2}{F(a)\wedge G(a)}}{F(a)}\quad\overset{1}{F(b)}}{F(a)\wedge F(b)}\qquad\dfrac{\forall x\forall y[(F(x)\wedge F(y))\to x=y]}{(F(a)\wedge F(b))\to a=b}\;\forall\text{-除去を2回}}{a=b}\qquad a=b\to(G(a)\to G(b))}{G(a)\to G(b)}}{G(b)}}{F(b)\to G(b)}\;1}{\forall x(F(x)\to G(x))}}{\forall x(F(x)\to G(x))}\;2}{\exists x(F(x)\wedge G(x))\to\forall x(F(x)\to G(x))}\;3$$

新装版に寄せて

故前原昭二先生による本書『記号論理入門』が世に出てから，既に四十年近い歳月が流れました．しかしながら，日本評論社の方からお聞きするところでは，今もなおこの書を求める声は続いているとのことです．論理記号によって表される概念の解説に始まり，演繹法の構築を経て，その応用例を示す本書の内容は，大変緻密に組み立てられていると同時に，初学者にも読みやすい丁寧な文章で綴られています．あらためて読み直してみても，入門書として完結している本書に，特に不足しているところなどは見つかりませんが，今回版を新たにするにあたり，日常言語の中で記号論理的な思考を伝える試みと，本書で用いられている演繹法の歴史に関する小文，さらに本書以降に出版された文献の紹介を以下に記します．

1. 記号論理の導入について

ここでは,「はしがき」の最後に述べられている文章について，一考を試みたいと思います．

その文章は，つぎの通りです．

> 最近，高等学校の教科のなかに記号論理を導入してはという話もあるようですが，わたくしはそれに賛成でも反対でもありません．しかし万一，そのような時世がきたとしても，本書の内容のようなことを生のままで高校生に教えることには絶対反対です．そうではなくて，そのようなときにそれを教える数学の先生方はもちろん，そのような論議をなさる方々に，少なくとも本書程度のことは知っておいていただきたいと，こう思うのであります．わたくしはけっして高校生向きの

参考書を書いたつもりではありません.

これは何を意味しているのでありましょうか．本書『記号論理入門』は，まず日常言語を用いた論理的思考方法から，そのなかにある「論理」を抽出して，記号論理により表現する方法の解説から始まります．思うに，そのような内容は，日常言語の世界において既にある程度の論理的思考の訓練なり習慣なりが身に付いている者に対して，さらにそれを整理し，より運用能力を高めるための手助けとして，いかに記号論理を使えばよいのかを示唆するものなのでありましょう．そうであるとすれば，日常言語による論理的思考訓練の未熟な者が本書の手法に直接あたるのは適切なことではないでしょう.

では，高等学校の先生方が高校生に対して，本書の内容をそのまま表面に出すことなく,「論理」を伝えるにはどのようにすればよいのでしょうか．何もこれは高等学校の教室内に特有の問題というわけでもないかもしれません.「はしがき」において想定された読者である「記号論理にいささかでも興味をもたれる〈教養ある一般の人士〉」にとって，類似の状況というものもそれぞれあるかもしれないと思います.

そこで，以下では試みに，高等学校において教員が生徒に，本書で扱っているような記号論理そのものは表に出さずに，しかしそれを裏では少々使って，論理的な考え方を伝える例を考えてみることにいたします.

問題　ある町の住民達の間で誰が誰のことを知っているか，について考える．いま，誰もが某氏のことを知っているとき，某氏は有名人であるということにする．一方，某氏が少なくとも誰か一人のことを知っているとき，某氏は社交的であるということにする．この町において，少なくとも一人の有名人がいれば，誰もが社交的であるといえるか．また逆に，誰もが社交的であれば少なくとも一人の有名人がいるといえるか.

この程度の問題であれば，段階を踏んで考えなくとも，ほぼ直感的にことの真偽がわかるかもしれません．実際，前者が成り立ち，後者が成り立たな

いわけですが，それぞれ住民全員がある一人の有名人を眺めている図と，各人がてんでばらばらに誰かのほうを向いて他には一向に関心を示さない図とを思い浮かべるのは難しいことではないでしょう．しかし一旦整理して考えてみるとき，あるいは前述の説明では納得できない人に理解を求めなければならないときは，どのように物事の筋道を立てればよいでしょうか．その際，本書の内容のような記号論理の心得があれば，それを頭の中で隠れて使うことにより，日常言語を用いた論理的な説明というものが可能になるのではないでしょうか．本書をお読みになった方には既におわかりのことと思いますが，この問題を記号論理により直接表現する例として，つぎのようなものがあります．

すなわち，x が y のことを知っているという，二変数 x,y の述語を $F(x,y)$ とおくとき，

$$\exists y \forall x F(x,y) \to \forall x \exists y F(x,y) \tag{1}$$

は成り立つかというのが問題の前半で，逆に，

$$\forall x \exists y F(x,y) \to \exists y \forall x F(x,y) \tag{2}$$

は成り立つかというのが後半です．

なお，このとき，一変数 y の述語「y は有名人である」は，$\forall x F(x,y)$ であらわされ，一変数 x の述語「x は社交的である」は $\exists y F(x,y)$ であらわされます．

さて，本書 (第 2 章 §6 例 2) でも示されているとおり，(1) は証明可能です．その証明を念頭に元の問題に対する解答例をつくるとすれば，以下のようになるでしょうか．

有名人が少なくとも一人はいたとする．このとき，有名人のうちの一人を勝手にとり，それを乙と名付ける．すると，誰もが乙のことを知っている．よって，住民を一人勝手にとり，それをいま甲と名付けると，甲は乙のことを知っている．したがって，甲は社交的である．さてこの甲が社交的であるということは，先に有名人の勝手な一人

> としてとってきた者によらず成り立つ．すなわち有名人の一人としてとった者を乙としようが丙としようが，甲が社交的であることを導くには違いがない．ところで，甲は住民から勝手にとった者であるから，それが社交的であるということはすなわち住民の誰もが社交的であるということである．

このように議論を組み立てると，実際には直感的な説明よりずいぶんとわかりにくいものに感じらるかもしれません．しかし，直感的な説明では何か釈然としないと思われる方に対して理解を求めるためには有用なこともありましょうし，少なくともより複雑で直感の働きにくい問題に対処するための訓練にはなることでしょう．

なお，(2) が成り立たないことを確かめるには，具体的な反例をつくればよいわけです．町の住民が甲乙丙の三人だけであり，甲が知っているのは (自分と) 乙のみ，乙が知っているのは (自分と) 丙のみ，丙が知っているのは (自分と) 甲のみとすれば，誰もが社交的ですが，有名人は一人もいません．ちなみに，自分のことは自分で知っているとか，社交的というときには自分以外に誰か知り合いがいるとか，本来与えられた問題中には何ら仮定されていない余計なことをもみたす例をつくったのですが，そんなことを気にしなければもっと簡単な反例が得られることは容易にわかります．

> **問題**　先の問題の設定に加え，この町には町長さんが一人いるとする．このとき，「甲が町長のことを知っているならば町長が乙のことを知っている」ということが成り立つとき，またそのときに限り，「甲は乙に挨拶をする」ということが成り立つとする．さて，誰からも挨拶をされる人のことを，親しみやすい人とよび，誰か少なくとも一人に挨拶をする人のことを，陽気な人とよぶことにする．この町において，少なくとも一人の親しみやすい人がいれば，誰もが陽気であるといえるか．また逆に，誰もが陽気であれば少なくとも一人の親しみやすい人がいるといえるか．

今度の問題は，一見すると前の問題と同じに思えます．しかし今回は問われていることが両者とも成り立つのです．これはどう考えればよいのでしょうか．この問題に関して明らかな直感が働くことはそう多くないのではなかろうかと思います．しかし，もはやくどくどしい説明は不要かもしれません．考えるヒントは，本書の中に隠されて，いや明示されているからです (第 7 章 §3 問 8)．

2. 本書の論理体系について

本書の第 2 章で解説され，その後も全体を通して利用されている論理計算の体系は,「はしがき」で述べられているように，ゲンツェンの NK, NJ です．これらと，さらにこれらに類する体系は，一般に「自然演繹体系」などとよばれます．そこにおける演繹は，論理記号の導入と除去に関する推論によって構成され，論理的な思考過程を「自然に」あらわしうるものとなっていることは，本書でご覧になったとおりです．NK, NJ は，180 ページで参考書の [8] としてあげられた論文において発表されたものですが，その序文のなかで著者ゲンツェンは次のようなことを述べています．すなわち，NK, NJ を作りその性質をよく調べた結果，任意の演繹から「無駄な部分」を取り除くことができるという定理を得たものの，この定理を表現しかつ証明するためには，改めてもうひとつ別に論理計算の体系を作り出すことが必要となった，と説明しています．その定理こそ，今日「ゲンツェンの基本定理」とよばれる，記号論理学におけるもっとも重要な定理のひとつなのですが，その発想はもともと NK, NJ から得られたわけです．

ここで，演繹における「無駄な部分」という言葉がありましたが，それを自然演繹体系のなかで表すと，ひとつの論理記号に関する導入の推論を用いて得られた論理式が，そのままその論理記号に関する除去の推論の適用を受けたとき，そのような論理式のことを「無駄な部分」とよぶ，となります．あまり正確な定義ではありませんが，大雑把にはそういうことです．例えば，本書 42 ページの例 3 にあげられた証明図において，論理式 $A \wedge B$ は無駄な部分であり，それを取り除くと，43 ページの最初に示されている証明図が得

られます．このような証明図の簡略化を，どのような証明図に対しても，無駄な部分が全くなくなるまで実行することができる，というのがゲンツェンの基本定理です．

この定理にはさまざまな応用があります．例えば，本書の「付録 I」で証明されている，158 ページの定理が成り立つことは，ゲンツェンの基本定理をきちんと表現すれば，それから直ちにわかるのです．

さて，ゲンツェンはその基本定理を表現・証明するため，自然演繹体系 NK, NJ とは別の論理計算体系を作ったわけですが，そうしなければならなかった理由は，古典論理に，すなわち NK にありました．ゲンツェンの証明から約三十年を経て，ちょうど本書が初めて出版された前後に，プラヴィッツが自然演繹体系においてもゲンツェンの基本定理を表現し，それを証明しました．しかしその際，古典論理に関してはまだある種の制限が加えられておりました．そこで，制限のない自然演繹の古典論理においてゲンツェンの基本定理はいかに表現されうるのか，また証明できるのか，が問題となります．

ここで少々私事に言及することをお許しください．この小文の筆者は学部学生の時分に本書の著者，前原先生にご指導いただいたのですが，その後，大学院生であったとき，先に述べました自然演繹の問題が未解決であることを前原先生から紹介されました．そして他の諸先生からもご意見をいただきながら，制限のない自然演繹の古典論理におけるゲンツェンの基本定理を証明するにいたったのですが，その論文の完成は，前原先生がご存命のうちに間に合わせることができませんでした．誠に残念でありましたが，このたび，本書の新装版に拙文を寄せる機会をいただき，この場をお借りしまして，恩師前原先生に対し心よりの感謝を改めてあらわしたいと思います．

なお，この節で述べました定理についてご興味のある方は，ゲンツェンの原論文 [8], およびこの後に追加してあります参考書 [A], [F], [G] などをお読みください．

3. 参考書 (追加)

本書の初版ではいくつかの参考書があげられています．ここでは，その追加として，初版発行より後に出版された書籍の中から，いくつかをご紹介いたします．

まず，本書の著者による，

[A] 前原昭二『数理論理学 — 数学的理論の論理的構造』(培風館) 1973 年

[B] 前原昭二『数学基礎論入門』(朝倉書店) 1977 年

は，いずれも，数理論理学における重要な定理の証明を目標とするものです．[A] では「ゲンツェンの基本定理」を，[B] では「ゲーデルの不完全性定理」を取り上げています．本書の内容からさらに進んで，数学に用いられる論理学，あるいは数学の一分野としての論理学に触れることができます．

つぎに，本書の初版において第一番目にあげられた参考書 [1] は，共著者を加え，章を増やした上で，

[C] 竹内外史・八杉満利子『証明論入門 (数学基礎論改題)』(共立出版) 1988 年

と改題されています．

さて,「はしがき」に述べられているように,「本書の主要部分」のひとつは「論理記号の意味と使用法とを説明した第 1 章」にあるわけですが,

[D] 本橋信義『新しい論理序説』(朝倉書店) 1997 年

には，論理記号を用いた表現の読み方・書き方について，詳しい解説があります．

また，本書には具体的な証明図を書かせる練習問題が含まれていますが,

[E] 上江洲忠弘『記号論理・入門』(遊星社) 1999 年

には，そのような例題が，命題論理の範囲に限られるものの，数多くあります．

ところで，情報科学と数理論理学とはさまざまな交わりをもちますが,

[F] 小野寛晰『情報科学における論理』(日本評論社) 1994 年

には，情報科学を学ぶときに必要となる，数理論理学上の概念や，定理およ

び証明が述べられています.

洋書については初版にならい，簡単な紹介にとどめます.

[G] A. S. Troelstra and H. Schwichtenberg, “Basic Proof Theory” second edition, Cambridge University Press, 2000

には，本書で用いられた演繹体系にまつわる定理を含め，証明論に関する事項が解説されています.

なお，初版の参考書欄では,「本書の ⟨たね⟩」があるものとしてゲンツェンの論文 [8] が最後に紹介されていますが，それはその後,

[H] M. E. Szabo (Ed.), “The Collected Papers of Gerhard Gentzen”, North-Holland Publishing Company, 1969

という英訳論文集の中に収録されました.

2005 年 10 月

安東祐希 (法政大学文学部哲学科)

前原 昭二 (まえはら・しょうじ)

略歴

1927年 東京に生まれる.

1951年 東京大学理学部数学科を卒業.
早稲田大学・東京教育大学・筑波大学・東京工業大学,
放送大学に勤務.

1992年 歿.

主な著書

『現代応用数学の基礎』全3巻(共著)

『線形代数と特殊相対論』

『記号論理読本』(いずれも日本評論社)

など.

記号論理入門[新装版](きごうろんりにゅうもん しんそうばん) 日評数学選書

1967年10月15日 第1版第1刷発行
2005年12月10日 新装版第1刷発行

著者 前原昭二
発行者 林克行
発行所 株式会社 日本評論社
〒170-8474 東京都豊島区南大塚3-12-4
電話 (03) 3987-8621 [販売]
(03) 3987-8599 [編集]
印刷 藤原印刷株式会社
製本 牧製本印刷株式会社
装釘 山崎 登

Printed in Japan
ISBN 4-535-60144-5